

# **Homogenizace eliptických rovnic**

## **Homogenization of Elliptic Equations**



## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Matyáš Theuer**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika

Téma: **Homogenizace eliptických rovnic**  
**Homogenization of Elliptic Equations**

Zásady pro vypracování:

Práce by měla obsahovat tyto části:

1. Úvod do problematiky matematické homogenizace eliptických rovnic.
2. Asymptotická expanze.
3. Konvergenční výsledky pro obyčejné i parciální diferenciální rovnice.
4. Numerické ověření teoretických výsledků a experimenty.

Seznam doporučené odborné literatury:

- 1) Doina Cioranescu, Patrizia Donato: An Introduction to Homogenization (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 17);
- 2) Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart: Multiscale Methods: Averaging and Homogenization (Springer - Texts in Applied Mathematics, 53)

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
*vedoucí katedry*



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
*děkan fakulty*





Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 3. května 2013

.....



*„Možná jsem nedošel tam, kam jsem původně chtěl, ale myslím, že jsem skončil tam, kde jsem potřeboval.“*

Douglas Adams

Rád bych na tomto místě poděkoval především doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za odborně i lidsky výborné vedení této práce, doc. Ing. Daliboru Lukášovi, Ph.D. za pomoc se zpracováním numerických výpočtů a v neposlední řadě i všem přátelům z Katedry aplikované matematiky, se kterými jsem v průběhu svého studia mohl prožívat sdílenou radost z objevování matematiky.



## Abstrakt

Tato práce se zabývá matematickou homogenizací eliptických úloh pro heterogenní objekty s jemnou periodickou strukturou. Studovány jsou obyčejné i parciální diferenciální rovnice. Pro oba případy jsou formulovány základní homogenizační teorémy, které jsou následně dokázány. Pro důkaz v  $N$  dimenzích je představen koncept dvojškálové konvergence odrážející chování tzv. rapidně oscilujících funkcí, které se v homogenizačních úlohách vyskytují. Součástí práce je i stručný popis praktické implementace řešení homogenizačních úloh ve 2D pomocí metody konečných prvků a nepřímé kolokační metody hraničních prvků. Dokázaná tvrzení jsou numericky ověřena na několika příkladech.

**Klíčová slova:** homogenizace, dvojškálová konvergence, asymptotická expanze, metoda konečných prvků, metoda hraničních prvků

## Abstract

In this thesis we study mathematical homogenization of elliptic equations for heterogeneous materials with fine periodic structure. Both ordinary and partial differential equations were studied and for both cases we state and prove homogenization theorems. Two-scale convergence method that reflects behaviour of rapidly oscillating functions is introduced for proof of homogenization theorem in  $N$  dimensions. We also present an overview of practical implementation for solving homogenization problems in 2D by finite element method and collocation boundary element method. Theoretical results are confirmed by several numerical experiments.

**Keywords:** Homogenization, Two-scale Convergence, Asymptotic Expansion, Finite Element Method, Boundary Element Method



## Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{N}$	– Množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	– Množina reálných čísel
$\mathbb{R}^N$	– $N$ -rozměrný eukleidovský prostor
$\mathcal{C}(\Omega)$	– Prostor spojitých funkcí na $\Omega$
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	– Prostor $k$ -krát spojitě diferencovatelných funkcí na $\Omega$
$\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$	– Prostor spojitých funkcí na $\overline{\Omega}$ s kompaktním nosičem v $\Omega$
$X^*$	– Duál prostoru $X$
$\ \cdot\ _X$	– Norma v prostoru $X$
$\nabla u$	– Gradient funkce $u$
$\nabla_x u$	– Gradient funkce $u$ vzhledem k proměnné $x$
$\operatorname{div} u$	– Divergence funkce $u$
$\operatorname{div}_x u$	– Divergence funkce $u(x, y)$ vzhledem k proměnné $x$
$\partial\Omega$	– Hranice množiny $\Omega$
MKP	– Metoda konečných prvků
MHP	– Metoda hraničních prvků
ODR	– Obyčejná diferenciální rovnice
PDR	– Parciální diferenciální rovnice





## Obsah

<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>1 Prostory funkcí a řešitelnost úloh</b>	<b>9</b>
1.1 Definice prostorů funkcí . . . . .	9
1.2 Řešitelnost úloh . . . . .	13
<b>2 Homogenizace pro ODR</b>	<b>17</b>
2.1 Důkaz homogenizačního teorému pro ODR . . . . .	22
2.2 Příklady . . . . .	25
<b>3 Asymptotická expanze</b>	<b>27</b>
3.1 Formulace úlohy a řešení . . . . .	27
3.2 Příklady . . . . .	33
<b>4 Dvojškálová konvergence</b>	<b>35</b>
4.1 Definice a vlastnosti . . . . .	36
4.2 Dvojškálová konvergence pro posloupnosti z $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	39
<b>5 Homogenizační teorém pro PDR</b>	<b>43</b>
5.1 Formulace úlohy . . . . .	43
5.2 Důkaz homogenizačního teorému pro PDR . . . . .	44
<b>6 Řešení homogenizačních úloh ve 2D</b>	<b>49</b>
6.1 Řešení pomocí MKP . . . . .	49
6.2 Řešení pomocí MHP . . . . .	51
<b>7 Numerické experimenty</b>	<b>59</b>
7.1 Homogenizace v 1D . . . . .	59
7.2 Homogenizace ve 2D . . . . .	63
7.3 Vedení tepla ve 2D . . . . .	75
<b>Závěr</b>	<b>79</b>
<b>Reference</b>	<b>81</b>



## Seznam obrázků

0.1	Ukázka zjemňování periodické struktury s $\varepsilon \rightarrow 0$ .	7
3.1	Příklad 3.3 a 3.4: funkce $a_z(y)$ .	34
6.1	Zadání funkce $a(y)$ pro kompozitní materiál.	51
7.1	Příklad 2.7: srovnání řešení $u_\varepsilon$ (zeleně) a $u_0$ (modře).	61
7.2	Příklad 2.8: srovnání řešení $u_\varepsilon$ (zeleně) a $u_0$ (modře).	62
7.3	Příklad 7.2: Funkce $f$ a řešení $u_0$ .	64
7.4	Příklad 7.2: funkce $\chi$ .	64
7.5	Příklad 7.2: řešení $u_\varepsilon$ a chyba $\text{err}_\varepsilon$ .	65
7.6	Příklad 7.2: řešení $u_\varepsilon$ a chyba $\text{err}_\varepsilon$ .	66
7.7	Příklad 7.3: řešení $u_0$ .	67
7.8	Příklad 7.3: řešení $u_\varepsilon$ a chyba $\text{err}_\varepsilon$ .	68
7.9	Příklad 7.3: řešení $u_\varepsilon$ a chyba $\text{err}_\varepsilon$ .	69
7.10	Příklad 7.4: funkce $\chi$ .	70
7.11	Příklad 7.4: řešení $u_\varepsilon$ a chyba $\text{err}_\varepsilon$ .	71
7.12	Příklad 7.5: zadání $\Omega$ a $f$ .	72
7.13	Příklad 7.5: řešení $u_\varepsilon$ a chyba $\text{err}_\varepsilon$ .	73
7.14	Příklad 7.5: řešení $u_\varepsilon$ a chyba $\text{err}_\varepsilon$ .	74
7.15	Příklad kompozitního materiálu.	75
7.16	Příklad 7.6: Oblast $\Omega$ .	76
7.17	Příklad 7.6: funkce $\chi$ .	77
7.18	Příklad 7.6: řešení $u_0$ .	77
7.19	Příklad 7.6: řešení $u_\varepsilon$ .	78



## Seznam tabulek

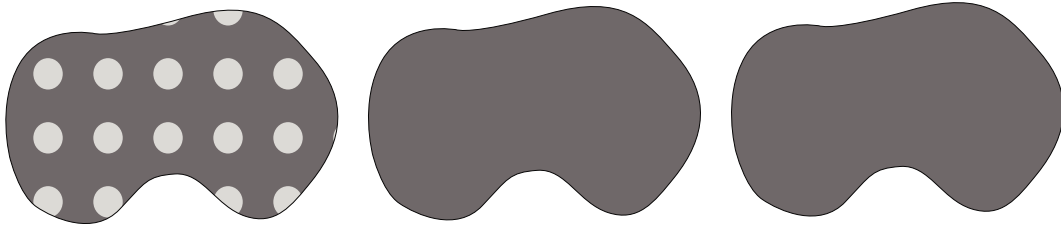
1	Chyba řešení $\text{err}_s$ a $\text{err}_r$ pro úlohy v 1D. . . . .	60
2	Příklad 7.2: chyba řešení $\text{err}_s$ a $\text{err}_r$ . . . . .	63
3	Příklad 7.3: chyba řešení $\text{err}_s$ a $\text{err}_r$ . . . . .	67
4	Příklad 7.4: chyba řešení $\text{err}_{s-K}$ , $\text{err}_{s-H}$ , $\text{err}_{r-K}$ a $\text{err}_{r-H}$ . . . . .	70
5	Příklad 7.5: chyba řešení $\text{err}_s$ a $\text{err}_r$ . . . . .	72
6	Příklad 7.6: chyba řešení $\text{err}_s$ a $\text{err}_r$ . . . . .	77



## Úvod

Homogenní materiály prakticky neexistují. Všechny známé objekty jsou od určitého měřítka tvořeny z nehomogenních částí. V této práci se budeme zabývat objekty s nehomogenitami, které jsou na podstatně větší úrovni než je úroveň atomů či molekul, ale které se v makroskopickém měřítku jeví jako homogenní. V praxi se může jednat například o kompozitní materiály. Ukazuje se, že při dostatečně jemné periodické struktuře se takový materiál chová jako homogenní, ale mnohé jeho makroskopické vlastnosti (vedení tepla, elasticita atd.) jsou silně ovlivněny velikostí, tvarem, rozmístěním a vlastnostmi částí na mikroskopické úrovni.

Základní úlohou matematické homogenizace je určit vlastnosti tohoto zdánlivě homogenního materiálu na základě znalostí o jednotlivých komponentech. Navíc modelování pomocí klasických numerických metod je vzhledem k jemné struktuře vyloučeno. Diskretizační síť, která by odrážela mikroskopické nehomogenity, by musela být velmi hustá a vedla by na příliš velkou soustavu rovnic.



Obrázek 0.1: Ukázka zjemňování periodické struktury s  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Uvažujme například Dirichletovu úlohu s nulovou okrajovou podmínkou modelující stacionárního rozložení teplotního pole v kompozitním materiálu na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  s vnitřními zdroji  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$-\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon(x) \right) = f(x), \quad (0.1)$$

kde  $A$  je matice tepelné vodivosti. Cílem homogenizace je studium řešení  $u_\varepsilon$  pro malá  $\varepsilon$ . Ukazuje se, že za splnění určitých podmínek má pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  posloupnost řešení úloh (0.1) limitu. To odráží skutečnost, že se heterogenní struktura při zmenšujícím se  $\varepsilon$  stává zanedbatelně jemnou. Nehomogenní materiál se pak jeví jako zdánlivě homogenní a je charakterizován konstantní maticí  $A^0$ . Takto homogenizovaná úloha

$$-\operatorname{div} (A^0 \nabla u_0) = f, \quad (0.2)$$

kde  $u_0$  je limitou  $u_\varepsilon$  je pak za splnění určitých požadavků na kvality  $A(y)$ ,  $f(x)$  a  $\Omega$  již řešitelná běžnými numerickými metodami.

Cílem této práce je představit a dokázat základní vztahy pro přechod od úloh s rapidně oscilujícími koeficienty (0.1) k homogenizované úloze (0.2). Po zavedení vhodných prostorů funkcí ukážeme, že homogenizace není triviální ani pro úlohy v jedné dimenzi. Následovat bude metoda asymptotické expanze ve více dimenzích pro rovnice, které ovšem musí splňovat vyšší požadavky na regularitu. Pro obecnější úlohy zavedeme koncept dvojškálové konvergence, který následně využijeme v důkazu homogenizačního teorému pro parciální diferenciální rovnice. Závěr této práce je věnován praktické implementaci řešení homogenizačních úloh pomocí MKP a MHP a numerickému ověření dokázaných tvrzení na několika modelových úlohách. Všechny výpočty jsou provedeny v programu MATLAB<sup>®</sup>.



## 1 Prostory funkcí a řešitelnost úloh

V následujícím textu budeme symbolem  $\Omega$  označovat omezenou oblast s lipschitzovskou hranicí v  $\mathbb{R}^N$ , kde  $N \in \mathbb{N}$ , a symbolem  $Y := \langle 0, 1 \rangle^N$   $N$ -dimenzionální jednotkovou krychli.

Symbolem  $\cdot$  budeme označovat standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^N$

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^N a_i b_i.$$

Symbolem  $\nabla$  budeme označovat gradient v  $\mathbb{R}^N$ , jehož složky jsou pro skalární funkci  $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  a vektorovou funkci  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  definovány

$$(\nabla v)_i := \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad (\nabla V)_{i,j} := \frac{\partial V_i}{\partial x_j}, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Symbolem  $\operatorname{div}$  budeme označovat divergenci, která je pro vektorovou funkci  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  a maticovou funkci  $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  definována

$$\operatorname{div} V := \sum_{i=1}^N \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \quad (\operatorname{div} A)_i := \sum_{j=1}^N \frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_j}, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Symbolem gradientu resp. divergence s dolním indexem označujícím proměnnou budeme označovat operátor gradientu resp. divergence vzhledem k uvedené proměnné. Například pro  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , kde  $x = (x_1, \dots, x_N)$  a funkci  $v : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$  jsou složky gradientu vzhledem k proměnné  $x$  definovány vztahem

$$(\nabla_x v(x, y))_i := \frac{\partial v(x, y)}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

### 1.1 Definice prostorů funkcí

V této části uvedeme definice některých prostorů s důrazem na prostory periodických funkcí, které jsou klíčové pro metody homogenizace. U těchto prostorů uvedeme i jejich základní vlastnosti.

**Definice 1.1.** Necht'  $1 \leq p < \infty$ .  $L^p(\Omega)$  definujeme jako prostor měřitelných funkcí  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , pro které platí

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)$  definujeme jako prostor měřitelných funkcí, pro něž existuje  $M \in \mathbb{R}$  takové, že  $|u(x)| \leq M$  pro s. v.  $x \in \Omega$ . Na  $L^\infty(\Omega)$  definujeme normu

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{esssup}_\Omega |f| := \inf_{\substack{S \subset \Omega \\ \lambda(S)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus S} |u(x)|.$$

*Poznámka 1.2.* Pro zjednodušení nerozlišujeme mezi funkce a třídy funkcí. Funkce lišící se na množině nulové míry považujeme za totožné.

**Definice 1.3.** Necht'  $1 \leq p < \infty$ . Sobolevův prostor  $W^{1,2}(\Omega)$  definujeme

$$W^{1,2}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, N\} \right\},$$

kde derivacemi myslíme derivace ve smyslu distribucí. Na tomto prostoru definujeme normu

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left( \int_\Omega \left( |u(x)|^p + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p \right) dx \right)^{1/p}.$$

Na oblasti  $\Omega$  s lipschitzovskou hranicí je

$$W^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}.$$

Prostor  $W_0^{1,p}(\Omega)$  pak označujeme symbolem  $H^1(\Omega)$ . Na tomto prostoru uvažujeme normu

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left( \int_\Omega \left( |u(x)|^2 + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

**Definice 1.4.** Necht'  $1 \leq p < \infty$ . Sobolevův prostor  $W_0^{1,p}(\Omega)$  definujeme<sup>1</sup>

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : Tu = 0\}$$

Prostor  $W_0^{1,2}(\Omega)$  značíme symbolem  $H_0^1(\Omega)$ .

*Poznámka 1.5.* Symbolem  $H^{-1}(\Omega)$  označujeme Banachův prostor definovaný

$$H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^*$$

---

<sup>1</sup>Symbolem  $T$  myslíme operátor stopy.

s normou

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|F(u)|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

**Definice 1.6.** Necht'  $X$  je Banachův prostor, pak  $L^p(\Omega; X)$  definujeme jako prostor měřitelných funkcí<sup>2</sup>  $f : \Omega \rightarrow X$  takových, že  $\|f(x)\|_X \in L^p(\Omega)$ .

**Definice 1.7.** Necht'  $f$  je funkce definovaná na  $\mathbb{R}^N$ . Řekneme, že  $f$  je  $Y$ -periodická funkce, jestliže pro všechna  $k \in \mathbb{Z}$  a všechna  $i \in \{1, \dots, N\}$  platí

$$f(x + ke_i) = f(x) \text{ v } \mathbb{R}^N,$$

kde  $\{e_1, \dots, e_N\}$  je kanonická báze  $\mathbb{R}^N$ .

**Definice 1.8.** Necht'  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq \beta$ .  $M(\alpha, \beta, \Omega)$  definujeme jako množinu funkcí  $A \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})$  takových, že pro libovolné  $x, \xi \in \mathbb{R}^N$  platí:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \xi^T A(x) \xi \geq \alpha \|\xi\|^2, \\ \text{(ii)} & \|A(x) \xi\| \leq \beta \|\xi\|. \end{cases} \quad (1.1)$$

Dále definujeme  $M_{per}(\alpha, \beta, \Omega)$  jako množinu  $Y$ -periodických funkcí  $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ .

Pro manipulaci s rapidně oscilujícími funkcemi definujeme následující prostory:

- $\mathcal{C}_{per}(Y) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) : f \text{ je } Y\text{-periodická}\},$
- $\mathcal{C}_{per}^\infty(Y) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) : f \text{ je } Y\text{-periodická}\},$
- $L_{per}^2(Y)$  definujeme jako zúplnění prostoru  $\mathcal{C}_{per}^\infty(Y)$  v normě

$$\|u\|_{L_{per}^2(Y)} := \left( \int_Y |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

- $H_{per}^1(Y)$  definujeme jako zúplnění prostoru  $\mathcal{C}_{per}^\infty(Y)$  v normě

$$\|u\|_{H_{per}^1(Y)} := \left( \int_Y \left( |u(x)|^2 + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

---

<sup>2</sup>Funkce  $f$  je měřitelná právě tehdy, když vzorem každé otevřené množiny v  $X$  je měřitelná množina v  $\Omega$ .

- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))$  je prostor nekonečně diferencovatelných funkcí  $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_{per}^\infty(Y)$ , pro které platí

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

*Poznámka 1.9.* Všimněme si, že každou funkci  $f \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  můžeme ztotožnit s funkcí  $\tilde{f}$  definovanou na  $\Omega \times \mathbb{R}^N$  předpisem  $\tilde{f}(x, y) = f(x)(y)$  (viz [14]).

*Poznámka 1.10.* V prostoru  $H_{per}^1(Y)$  neplatí Poincarého nerovnost, proto definujeme

$$H_{per}(Y) := \left\{ u \in H_{per}^1(Y) : \int_Y u(x) \, dx = 0 \right\}.$$

Lze ukázat, že existuje konstanta  $C_p > 0$  taková, že

$$\forall u \in H_{per}(Y) : \|u\|_{L^2(Y)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(Y)},$$

a že funkcionál  $\|\cdot\|_{H_{per}(Y)}$  definovaný předpisem

$$\|u\|_{H_{per}(Y)} := \|\nabla u\|_{L^2(Y)}$$

je na prostoru  $H_{per}(Y)$  normou ekvivalentní s normou  $\|\cdot\|_{H_{per}^1(Y)}$  (viz [18]).

**Lemma 1.11.** *Nechť  $H_{per}(Y)$  je prostor definovaný v poznámce 1.10.*

*Pak prostor*

$$\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{per}(Y))$$

*se skalárním součinem*

$$(U, V)_{\mathcal{H}} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla_y u_1, \nabla_y v_1)_{L^2(\Omega; H_{per}(Y))},$$

*kde  $U = (u, u_1)$  a  $V = (v, v_1)$ , a indukovanou normou*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_y u_1\|_{L^2(\Omega; H_{per}(Y))}^2,$$

*je Hilbertův prostor (viz [18]).*

**Lemma 1.12.** *Nechť  $1 \leq p < \infty$ . Prostor  $L^p(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  je separabilní Banachův prostor, který je hustý v  $L^p(\Omega \times Y)$  a pro všechny funkce  $u(x, y) \in L^p(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  platí*

- $\forall \varepsilon > 0 : \|u(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u(x, y)\|_{L^p(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))},$
- $\int_{\Omega} |u(x, \frac{x}{\varepsilon})|^p \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \int_Y |u(x, y)|^p \, dy \, dx.$

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt například v [14].

**Lemma 1.13.** *Necht'  $f \in L^2_{per}(Y)$ . Definujme*

$$f_\varepsilon(x) := f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ v } \mathbb{R}^N.$$

*Pak pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  platí*

$$f_\varepsilon \rightharpoonup \int_Y f(y) \, dy \text{ v } L^2(\Omega).$$

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt například v [14] nebo v [7].

## 1.2 Řešitelnost úloh

Necht'  $a$  je bilineární forma na Hilbertově prostoru  $H$  a  $F \in H^*$ . Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} \text{najdi } u \in H \text{ takové, že} \\ \forall v \in H : a(u, v) = F(v). \end{cases} \quad (1.2)$$

Tato úloha se nazývá *variační rovnice* a funkce  $v$  nazýváme *testovací funkce*.

**Věta 1.14** (Lax-Milgramovo lemma). *Necht'  $H$  je Hilbertův prostor,  $a$  je spojitá bilineární  $H$ -eliptická forma (s konstantou  $c$ ) na  $H$  a  $F \in H^*$ .*

*Pak existuje právě jeden prvek  $u \in H$  takový, že*

$$\forall v \in H : F(v) = a(u, v),$$

*a navíc platí*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{c} \|F\|_{H^*}.$$

*Poznámka 1.15.* Z Lax-Milgramova lemmatu 1.14 vyplývá, že pro spojitou  $H$ -eliptickou bilineární formu  $a$  má variační rovnice (1.2) právě jedno řešení  $u \in H$ .

## Dirichletova úloha

Slabým řešením  $u \in H_0^1(\Omega)$  homogenní<sup>3</sup> Dirichletovy úlohy

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

<sup>3</sup>Zde myslíme homogenní ve smyslu okrajových podmínek

kde  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ , rozumíme řešení variační rovnice (1.2), kde  $H = H_0^1(\Omega)$ ,  $F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$  a

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.4)$$

**Tvrzení 1.16.** *Nechť  $\partial\Omega$  je třídy  $\mathcal{C}^1$ ,  $A \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^{N \times N}$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  a  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ . Pak  $u$  je klasické řešení úlohy*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x) \nabla u(x)) = f, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

právě tehdy, když  $u$  je slabým řešením (1.3), viz [7].

**Věta 1.17.** *Nechť  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$  a  $f \in L^2(\Omega)$ .*

*Pak existuje právě jedno řešení  $u \in H_0^1(\Omega)$  úlohy (1.5) a navíc platí*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (1.6)$$

*Důkaz.* Ověříme předpoklady Lax-Milgramova lemmatu 1.14. Z (1.1) a (1.4) vyplývá

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : a(v, v) \geq \alpha \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2, .$$

Díky Poincarého nerovnosti můžeme v  $H_0^1(\Omega)$  použít ekvivalentní normu

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

takže platí

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

což znamená, že  $a$  je  $H_0^1(\Omega)$ -eliptická. Navíc opět z (1.1) a Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$|a(u, v)| \leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

což znamená omezenost a tedy spojitost  $a$  na  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ .

Nyní již můžeme aplikovat Lax-Milgramovo lemma pro  $H = H_0^1(\Omega)$ ,  $F = f$  a  $a$  definovanou vztahem (1.4) a získáme tak existenci a jednoznačnost řešení (1.3) a odhad (1.6).  $\square$

### Úloha s periodickou okrajovou podmínkou

Předpokládejme, že koeficienty  $a_{i,j}$  ve vztahu (1.4) jsou  $Y$ -periodické a nechť  $f$  je  $Y$ -periodická funkce. Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{v } Y, \\ u \text{ je } Y\text{-periodická.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Přirozeným prostorem pro hledání řešení je prostor  $H_{per}(Y)$  definovaný v poznámce 1.10. Pro  $f \in (H_{per}(Y))^*$  je variační formulace této úlohy

$$\begin{cases} \text{najdi } u \in H_{per}(Y) \text{ takové, že} \\ \forall v \in H_{per}(Y) : a_Y(u, v) = \int_Y f v \, dy, \end{cases} \quad (1.8)$$

kde

$$a_Y(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_Y a_{i,j}(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_j} \, dy, \quad \forall u, v \in H_{per}(Y).$$

**Věta 1.18.** *Nechť  $A \in M_{per}(\alpha, \beta, Y)$  a  $f \in L^2(Y)$ ,  $\int_Y f \, dy = 0$ .*

*Pak existuje právě jedno řešení  $u \in H_{per}(Y)$  úlohy (1.8) a navíc platí*

$$\|u\|_{H_{per}(Y)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{(H_{per}(Y))^*}. \quad (1.9)$$

*Důkaz.* Obdobně jako v důkazu věty (1.17) stačí ověřit předpoklady Lax-Milgramova lemmatu pro  $H = H_{per}(Y)$  a  $a(u, v) = a_Y(u, v)$ . V tomto případě  $H$ -elipticita vyplývá z (1.1) a definice normy na prostoru  $H_{per}(Y)$  (viz pozn. (1.10)).  $\square$





## 2 Homogenizace pro ODR

V této kapitole uvedeme a dokážeme základní homogenizační teorém pro obyčejné diferenciální rovnice. Následně uvedeme několik příkladů.

**Věta 2.1** (Homogenizační teorém pro ODR). *Nechť funkce  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  je 1-periodická,  $\exists k \in \mathbb{R}^+ : 0 < k \leq a(x)$  pro s. v.  $x \in \mathbb{R}$  a  $f \in L^2(0, 1)$ . Definujme pro každé  $\varepsilon > 0$  funkci  $a_\varepsilon(x) := a(\frac{x}{\varepsilon})$  a označme pro  $u_\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$  slabé řešení úlohy*

$$\begin{cases} -(a_\varepsilon u'_\varepsilon)' = f & \text{v } (0, 1), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

*Pak pro každou posloupnost  $(\varepsilon_n)$  takovou, že  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ , platí*

$$u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0 \text{ v } H_0^1(0, 1),$$

*kde  $u_0$  je slabým řešením úlohy*

$$\begin{cases} -(a_0 u'_0)' = f & \text{v } (0, 1), \\ u_0(0) = u_0(1) = 0, \end{cases} \quad a_0 := \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx}. \quad (2.2)$$

Před uvedením důkazu této věty dokážeme několik lemmat.

**Lemma 2.2.** *Bud'  $X$  normovaný lineární prostor a  $(y_n)$  taková posloupnost v  $X$ , že*

- $\exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\| \leq c,$
- $D \subset X^*, \overline{D} = X^*,$
- $\forall \hat{\varphi} \in D : \langle \hat{\varphi}, y_n \rangle \rightarrow 0.$

*Pak platí  $y_n \rightharpoonup 0$ .*

*Důkaz.* Podle definice slabé konvergence musíme dokázat, že platí

$$\forall \varphi \in X^* : \langle \varphi, y_n \rangle \rightarrow 0.$$

Bud'  $\varphi \in X$  dáno. Pak z předpokladů vyplývá, že

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \hat{\varphi} \in D) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, m > n_0) :$$

$$\begin{aligned}
|\langle \varphi, y_n \rangle - \langle \varphi, y_m \rangle| &= |\langle \varphi, y_n \rangle - \langle \hat{\varphi}, y_n \rangle + \langle \hat{\varphi}, y_n \rangle - \langle \hat{\varphi}, y_m \rangle + \langle \hat{\varphi}, y_m \rangle - \langle \varphi, y_m \rangle| \leq \\
&\leq \underbrace{\|\varphi - \hat{\varphi}\|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\leq c} + \underbrace{|\langle \hat{\varphi}, y_n \rangle - \langle \hat{\varphi}, y_m \rangle|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\hat{\varphi} - \varphi\|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|y_m\|}_{\leq c},
\end{aligned}$$

takže  $(\langle \varphi, y_n \rangle)$  je cauchyovská, a tedy konvergentní posloupnost (v  $\mathbb{R}$ ).

Definujme zobrazení  $L : X^* \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem

$$L\varphi := \lim \langle \varphi, y_n \rangle.$$

Toto zobrazení je zřejmě lineární a omezené, a tedy spojité. Odtud a z předpokladů lemmatu plyne

$$(\forall \varphi \in X^*) (\exists (\hat{\varphi}_k) \subset D) : \hat{\varphi}_k \rightarrow \varphi,$$

$$0 = L\hat{\varphi}_k \rightarrow L\varphi = \lim \langle \varphi, y_n \rangle,$$

a proto

$$\forall \varphi \in X^* : \lim \langle \varphi, y_n \rangle = 0.$$

□

Jednoduchým důsledkem tohoto lemmatu je následující tvrzení.

**Lemma 2.3.** *Bud'  $y \in L^2(0, 1)$  a  $(y_n) \subset L^2(0, 1)$  taková omezená posloupnost, že*

$$\int_0^1 y_n \varphi \, dx \rightarrow \int_0^1 y \varphi \, dx$$

*pro všechna  $\varphi$  z množiny, jejíž lineární obal je hustý v  $L^2(0, 1)$ .*

*Pak platí*

$$y_n \rightharpoonup y \text{ v } L^2(0, 1).$$

**Lemma 2.4.** *Bud'  $y \in L^\infty(\mathbb{R})$  1-periodická funkce.*

*Pak pro libovolnou posloupnost  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$  platí*

$$y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup y_0 := \int_0^1 y(x) \, dx \text{ v } L^2(0, 1).$$

*Důkaz.* Musíme dokázat, že platí

$$\forall \varphi \in L^2(0, 1) : \int_0^1 y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \varphi(x) \, dx \rightarrow y_0 \int_0^1 \varphi(x) \, dx.$$

Díky lemmatu 2.3 víme, že toto tvrzení stačí dokázat pouze pro funkce z množiny, jejíž lineární obal je hustý v  $L^2(0, 1)$ , tzn. například pro všechny funkce tvaru

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & x \in (t, t+a), \\ 0, & x \in (0, 1) \setminus (t, t+a), \end{cases}$$

kde  $a, t > 0$ ,  $(t, t+a) \subset (0, 1)$ . (Lineární kombinací těchto funkcí získáme libovolnou po částech konstantní funkci a množina po částech konstantních funkcí je hustá v  $L^2(0, 1)$ .)

Stačí tedy dokázat pro všechna výše uvedená  $t, a$ , že

$$\int_t^{t+a} y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \, dx \rightarrow ay_0. \quad (2.3)$$

Pro libovolné pevné  $\varepsilon_n \in (0, \frac{a}{2})$  uvažujme dělení intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$

$$D : 0 = x_0 < x_1 = x_0 + \varepsilon_n < \dots < x_{m-1} = x_{m-2} + \varepsilon_n < x_m = 1,$$

takové, že

$$\|D\| = \max_{\ell \in \{1, \dots, m\}} (x_\ell - x_{\ell-1}) \leq \varepsilon_n.$$

Definujme

$$x_p := \min \{x_\ell : x_\ell \in (t, t+a)\}, \quad x_q = \max \{x_\ell : x_\ell \in (t, t+a)\}$$

a interval

$$M_{\varepsilon_n} := \langle x_p, x_q \rangle.$$

Pak

$$\int_{M_{\varepsilon_n}} y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \, dx = \sum_{i=p}^{q-1} \int_{x_i}^{x_i+\varepsilon_n} y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \, dx = \sum_{i=p}^{q-1} \int_{\frac{x_i}{\varepsilon_n}}^{\frac{x_i}{\varepsilon_n}+1} y(s) \varepsilon_n \, ds.$$

(Provedli jsme substituci  $\frac{x}{\varepsilon_n} = s$ ,  $dx = \varepsilon_n ds$ .) Díky 1-periodicitě funkce  $y$  je jedno, přes který interval délky 1 ji budeme integrovat, proto

$$\int_{M_{\varepsilon_n}} y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx = \sum_{i=p}^{q-1} \int_0^1 y(s) \varepsilon_n ds = \sum_{i=p}^{q-1} y_0 \varepsilon_n = y_0 |x_q - x_p|.$$

Je zřejmé, že platí

$$a - 2\varepsilon_n \leq |x_q - x_p| \leq a,$$

takže pro  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  bude

$$y_0 |x_q - x_p| \rightarrow y_0 a$$

a zároveň

$$0 \leq \left| \int_{M_{\varepsilon_n}} y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx - \int_t^{t+a} y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \right| \leq 2\varepsilon_n \|y\|_{L^\infty(0,1)} \rightarrow 0.$$

Odtud plyne

$$\int_t^{t+a} y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow ay_0,$$

což bylo podle (2.3) potřeba dokázat. □

**Lemma 2.5.** *Necht'  $(x_n), (y_n) \subset L^2(0, 1)$ ;  $x, y \in L^2(0, 1)$  a necht'*

- $x_n \rightharpoonup x$  v  $L^2(0, 1)$ ,
- $y_n \rightarrow y$  v  $L^2(0, 1)$ ,
- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n y_n \in L^2(0, 1)$ ,
- $\exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n y_n\| \leq c$ ,
- $xy \in L^2(0, 1)$ .

*Pak*

$$x_n y_n \rightharpoonup xy \text{ v } L^2(0, 1).$$

*Důkaz.* Díky Rieszově větě stačí dokázat, že pro všechny funkce  $\varphi \in L^2(0, 1)$  platí

$$\int_0^1 x_n y_n \varphi dt \rightarrow \int_0^1 xy \varphi dt.$$

Podle lemmatu 2.3 se však stačí omezit například na funkce

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1, & t \in (a, b), \\ 0, & t \in (0, 1) \setminus (a, b), \end{cases}$$

kde  $(a, b) \subset (0, 1)$ ; tzn. stačí dokázat, že platí  $\int_a^b x_n y_n \, dt \rightarrow \int_a^b xy \, dt$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_a^b x_n y_n - xy \, dt \right| &= \left| \int_a^b x_n y_n + x_n y - x_n y - xy \, dt \right| \leq \left| \int_a^b x_n (y_n - y) \, dt \right| + \\ &+ \left| \int_a^b y (x_n - x) \, dt \right| \leq \left( \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \left| \int_a^b y (x_n - x) \, dt \right| \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

protože slabě konvergentní posloupnost  $(x_n)$  je omezená, takže  $\|x_n\| \cdot \|y_n - y\| \rightarrow 0$ , a konvergence  $\left| \int_a^b y (x_n - x) \, dt \right| \rightarrow 0$  plyne přímo z definice slabé konvergence  $x_n \rightharpoonup x$  v  $L^2(0, 1)$ .  $\square$

**Lemma 2.6.** *Bud'  $H$  Hilbertův prostor,  $(x_n)$  omezená posloupnost v  $H$  a prvek  $x_0 \in H$ , který není slabou limitou posloupnosti  $(x_n)$ .*

*Pak existuje  $\widehat{x_0} \in H$  a posloupnost  $(x_{n_k})$  vybraná z  $(x_n)$  taková, že  $x_{n_k} \rightharpoonup \widehat{x_0} \neq x_0$  v  $H$ .*

*Důkaz.* To, že  $(x_n)$  nekonverguje slabě k  $x_0$  znamená, že existuje  $f \in H^*$ , pro který platí

$$(\exists \varepsilon_0 > 0) (\forall n_0 \in \mathbb{N}) (\exists n > n_0) : |f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0.$$

Z posloupnosti  $(x_n)$  můžeme tedy vybrat podposloupnost  $(x_{n_k})$  takovou, že

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : |f(x_{n_k}) - f(x_0)| > \varepsilon_0.$$

Tato posloupnost je zřejmě také omezená, takže existuje posloupnost vybraná z  $(x_{n_k})$  (značme ji stejně) a  $\widehat{x_0} \in H$  takové, že  $x_{n_k} \rightharpoonup \widehat{x_0}$  v  $H$ , takže platí

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(\widehat{x_0}).$$

Protože však platí  $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| > \varepsilon_0$ , je i  $|f(\widehat{x_0}) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ , takže  $\widehat{x_0} \neq x_0$ .  $\square$

## 2.1 Důkaz homogenizačního teorému pro ODR

Dokažme nyní větu 2.1. Podle Lax-Milgramova lemmatu víme, že pro každé  $\varepsilon$  existuje právě jedno slabé řešení  $u_\varepsilon$  úlohy (2.1). Je to taková funkce  $u_\varepsilon \in H_0^1(0, 1)$ , pro niž platí

$$\forall v \in H_0^1(0, 1) : \int_0^1 a_\varepsilon u'_\varepsilon v' \, dx = \int_0^1 f v \, dx. \quad (2.4)$$

Díky Friedrichsově nerovnosti můžeme v  $H_0^1(0, 1)$  použít normu

$$\|u\|_{H_0^1(0,1)}^2 := \int_0^1 u' u' \, dx.$$

Uvažujme nyní posloupnost  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ . Pro funkce  $u_{\varepsilon_n}$  pak platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 k u'_{\varepsilon_n} u'_{\varepsilon_n} \, dx &\leq \int_0^1 a_{\varepsilon_n} u'_{\varepsilon_n} u'_{\varepsilon_n} \, dx = \int_0^1 f u_{\varepsilon_n} \, dx, \\ \|u_{\varepsilon_n}\|_{H_0^1(0,1)}^2 &= \int_0^1 u'_{\varepsilon_n} u'_{\varepsilon_n} \, dx \leq \frac{1}{k} \int_0^1 f u_{\varepsilon_n} \, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{k} \|f\|_{L^2(0,1)} \|u_{\varepsilon_n}\|_{L^2(0,1)} \leq c \|u_{\varepsilon_n}\|_{H_0^1(0,1)}, \end{aligned}$$

a proto

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N} : \|u_{\varepsilon_n}\|_{H_0^1(0,1)} \leq c,$$

kde konstanta  $c$  nezávisí na  $\varepsilon_n$ . (V odhadech jsme využili Cauchy-Schwartzovy nerovnosti a spojitosti vnoření  $H_0^1(0, 1)$  do  $L^2(0, 1)$ .)

Právě jsme ukázali, že posloupnost  $(u_{\varepsilon_n})$  je omezená v reflexivním prostoru  $H_0^1(0, 1)$ , takže z ní můžeme vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Existuje tedy  $u_0 \in H_0^1(0, 1)$  takové, že pro vybranou posloupnost z  $(u_{\varepsilon_n})$  (značme ji stejně) platí:  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(0, 1)$ .

Nechť  $\varphi \in L^2(0, 1)$  je libovolné. Pak funkcionál  $F : H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definovaný předpisem

$$F(v) := \int_0^1 v' \varphi \, dx$$

je zřejmě lineární, a protože

$$\left| \int_0^1 v' \varphi \, dx \right| \leq \|v'\|_{L^2(0,1)} \|\varphi\|_{L^2(0,1)} = \|\varphi\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{H_0^1(0,1)},$$

je  $F \in (H_0^1(0, 1))^*$ . Navíc už víme, že  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$ , takže  $F u_{\varepsilon_n} \rightarrow F u_0$ .

Zjistili jsme, že  $\forall \varphi \in L^2(0,1) : \int_0^1 u'_{\varepsilon_n} \varphi \, dx \rightarrow \int_0^1 u'_0 \varphi \, dx$ , a tedy

$$u'_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u'_0 \text{ v } L^2(0,1). \quad (2.5)$$

Definujme nyní novou posloupnost  $(\xi_{\varepsilon_n}) \subset L^2(0,1)$  předpisem

$$\xi_{\varepsilon_n} := a_{\varepsilon_n} u'_{\varepsilon_n}. \quad (2.6)$$

Tato posloupnost je omezená v  $L^2(0,1)$ , protože  $\|a_{\varepsilon_n}\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|a\|_{L^\infty(0,1)} \in \mathbb{R}$  a  $(u'_{\varepsilon_n})$  je omezená (viz lemma 2.5), takže z ní můžeme vybrat slabě konvergentní podposloupnost (opět ji značme stejně). Tzn.

$$\exists \xi_0 \in L^2(0,1) : \xi_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \xi_0 \text{ v } L^2(0,1).$$

Uvažujeme-li  $\xi_{\varepsilon_n}$  jako distribuci, z definice slabého řešení (2.4) vyplývá, že platí  $-\xi'_{\varepsilon_n} = f$ , takže  $\|\xi'_{\varepsilon_n}\|_{L^2(0,1)} = \|f\|_{L^2(0,1)}$ . Platí tedy

$$\exists c \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : \|\xi_{\varepsilon_n}\|_{H^1(0,1)} = \sqrt{\|\xi_{\varepsilon_n}\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\xi'_{\varepsilon_n}\|_{L^2(0,1)}^2} \leq c.$$

Z omezené posloupnosti  $(\xi_{\varepsilon_n})$  v  $H^1(0,1)$  můžeme vybrat slabě konvergentní posloupnost v  $H^1(0,1)$ . Prostor  $H^1(0,1)$  je kompaktně vnořený do  $L^2(0,1)$ , takže (po vybrání)  $(\xi_{\varepsilon_n})$  konverguje dokonce silně v  $L^2(0,1)$ .

Nyní se vrátíme k definici  $(\xi_{\varepsilon_n})$  (2.6)

$$u'_{\varepsilon_n} = \frac{1}{a_{\varepsilon_n}} \xi_{\varepsilon_n}. \quad (2.7)$$

Z lemmatu 2.4 vyplývá

$$\frac{1}{a_{\varepsilon_n}} \rightharpoonup \int_0^1 \frac{1}{a(x)} \, dx \text{ v } L^2(0,1) \quad (2.8)$$

a také jsme již ukázali, že

$$\xi_{\varepsilon_n} \rightarrow \xi_0 \text{ v } L^2(0,1). \quad (2.9)$$

Z lemmatu 2.5 a vztahů (2.7)-(2.9) plyne:

$$u'_{\varepsilon_n} = \frac{1}{a_{\varepsilon_n}} \xi_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \left( \int_0^1 \frac{1}{a(x)} \, dx \right) \xi_0 \text{ v } L^2(0,1),$$

ale současně víme (viz.(2.5)), že  $u'_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u'_0$  v  $L^2(0, 1)$ . Jedna posloupnost nemůže mít dvě různé slabé limity, takže

$$\begin{aligned} u'_0 &= \left( \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx \right) \xi_0, \\ \xi_0 &= \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx} u'_0(x) = a_0 u'_0. \end{aligned}$$

Navíc nepřehlédněme, že z  $u'_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u'_0$  v  $L^2(0, 1)$  vyplývá, že  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(0, 1)$ .

Pro všechna  $v \in H_0^1(0, 1)$  platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi_{\varepsilon_n} v' dx &\rightarrow \int_0^1 \xi_0 v' dx \\ \left( 0 \leq \left| \int_0^1 \xi_{\varepsilon_n} v' - \xi_0 v' dx \right| \leq \|\xi_{\varepsilon_n} - \xi_0\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v'\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0 \right), \end{aligned}$$

a zároveň

$$\forall v \in H_0^1(0, 1) : \int_0^1 \xi_{\varepsilon_n} v' dx = \int_0^1 f v dx,$$

viz (2.4) a (2.6). Limitním přechodem a dosazením za  $\xi_0$  dostaneme

$$\forall v \in H_0^1 : \int_0^1 a_0 u'_0 v' dx = \int_0^1 f v dx, \text{ kde } a_0 = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx}.$$

Dokázali jsme, že pro libovolnou posloupnost  $(\varepsilon_n)$  takovou, že  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ , existuje vybraná posloupnost  $(\varepsilon_{n_k})$  taková, že  $u_{\varepsilon_{n_k}} \rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(0, 1)$ . Zbývá dokázat, že  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(0, 1)$ .

Předpokládejme sporem, že  $u_{\varepsilon_n} \not\rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(0, 1)$ , pak podle lemmatu 2.6 (víme, že  $(u_{\varepsilon_n})$  je omezená posloupnost) existuje  $\widehat{u}_0 \in H_0^1(0, 1)$  takové, že  $\widehat{u}_0 \neq u_0$  a pro nějakou vybranou posloupnost platí  $u_{\varepsilon_{n_k}} \rightharpoonup \widehat{u}_0$ . Už jsme však dokázali, že pro libovolné  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$  můžeme z  $u_{\varepsilon_n}$  vybrat podposloupnost, která slabě konverguje k  $u_0$ . I z posloupnosti  $u_{\varepsilon_{n_k}}$  tedy můžeme vybrat podposloupnost, která slabě konverguje k  $u_0$ . To je ovšem spor, protože posloupnost  $u_{\varepsilon_{n_k}}$  konverguje slabě k  $\widehat{u}_0$ , což je různé od  $u_0$ . Ze slabě konvergentní posloupnosti nemůžeme vybrat podposloupnost, která by měla jinou slabou limitu.

□



## 2.2 Příklady

**Příklad 2.7.** Definujme funkci  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  jako 1-periodické prodloužení funkce  $a_z \in L^\infty(0, 1)$  definované

$$a_z(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}, 1 \rangle \\ 10, & x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \end{cases}$$

a uvažujme funkci  $f \equiv 1$ . Řešení  $u_\varepsilon$  úlohy

$$\begin{cases} -(a_\varepsilon u'_\varepsilon)' = f & \text{v } (0, 1) \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

budou podle věty 2.1 pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  konvergovat k řešení  $u_0$  homogenizované úlohy

$$\begin{cases} -(a_0 u'_0)' = f & \text{v } (0, 1), \\ u_0(0) = u_0(1) = 0, \end{cases} \quad a_0 = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a_z(x)} dx}.$$

Homogenizovanou úlohu lze vyřešit snadno analyticky. Rovnici dvakrát integrujeme a s využitím okrajových podmínek dostaneme řešení

$$u_0(x) = -\frac{1}{2a_0}(x^2 - x), \quad a_0 = \frac{20}{11} = 1, \overline{81}. \quad (2.10)$$

**Příklad 2.8.** Definujme funkci  $a \in L^\infty(\mathbb{R})$  jako 1-periodické prodloužení funkce  $a_z \in L^\infty(0, 1)$  definované

$$a_z(x) = 13 - 12 \cos(\pi x)$$

a uvažujme funkci  $f(x) = \sin(2\pi x)$ . Řešení  $u_\varepsilon$  úlohy

$$\begin{cases} -(a_\varepsilon u'_\varepsilon)' = f & \text{v } (0, 1) \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

budou podle věty 2.1 pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  konvergovat k řešení  $u_0$  homogenizované úlohy

$$\begin{cases} -(a_0 u'_0)' = f & \text{v } (0, 1), \\ u_0(0) = u_0(1) = 0, \end{cases} \quad a_0 = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{13-12\cos(\pi x)} dx} = 5.$$

Homogenizovanou úlohu lze vyřešit snadno analyticky. Rovnici dvakrát integrujeme a s využitím okrajových podmínek dostaneme řešení

$$u_0(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{20\pi^2}. \quad (2.11)$$

Srovnání řešení  $u_0$  s  $u_\varepsilon$  pro různá  $\varepsilon$  lze pro oba příklady najít v části 7.

### 3 Asymptotická expanze

Mezi nejstarší metody homogenizace patří metoda nazývaná asymptotická expanze. Její první použití se datuje do šedesátých let minulého století, viz [8]. Tato metoda je založena na předpokladu, že řešení úlohy s periodickou mikrostrukturou lze vyjádřit řadou

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots$$

Tato úvaha odráží předpoklad, že pro materiál s  $\varepsilon$ -periodickou strukturou má řešení  $u_\varepsilon$  oscilace ve stejném měřítku, viz [8, 3, 19]. Následující text je založen zejména na rukopisu [4].

#### 3.1 Formulace úlohy a řešení

Uvažujme eliptickou parciální diferenciální rovnici s Dirichletovou okrajovou podmínkou ve tvaru

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} (x) \right) = f(x) & \text{v } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

kde  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ,  $A \in M_{per}(\alpha, \beta, \Omega) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N})$  a  $\Omega$  je oblast s hladkou hranicí v  $\mathbb{R}^N$ .

*Poznámka 3.1.* Je zřejmé, že ve formulaci úlohy (3.1) klademe na funkce  $A$ ,  $f$  a oblast  $\Omega$  příliš přísné požadavky. Umožní nám to však provést úpravy, pomocí kterých odvodíme vzorec pro homogenizované koeficienty. V následující kapitole pak dokážeme, že získaný vzorec platí i pro některé funkce a oblasti, které předpoklady úlohy (3.1) nesplňují.

Podívejme se na problém (3.1) z makroskopického pohledu pomocí proměnné  $x$  a mikroskopického pomocí proměnné  $\frac{x}{\varepsilon}$ . Pro  $x \in \Omega$  totiž existuje  $k \in \mathbb{Z}$  takové, že  $\frac{x}{\varepsilon} = k + y$ , kde  $y \in Y$ , takže  $x$  udává pozici v oblasti  $\Omega$  a  $y$  udává pozici v referenční jednotkové krychli  $Y$ . Zkusme hledat řešení (3.1) ve tvaru

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (3.2)$$

kde funkce  $u_j(x, y) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  jsou pro všechna  $j \in \mathbb{N}$   $Y$ -periodické vzhledem k proměnné  $y$ .

Nechť  $\psi = \psi(x, y) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká funkce a definujme pro každé  $\varepsilon > 0$  funkci  $\psi_\varepsilon(x) := \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Pro parciální derivace funkce  $\psi_\varepsilon(x)$  pak platí

$$\frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y_j}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.3)$$

Formální derivací  $u_\varepsilon$  ve tvaru (3.2) tedy dostaneme

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots \right) + \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial y_j} + 1 \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial y_j} + \dots \right) \quad (3.4)$$

Nyní formálně dosadíme (3.4) do (3.1) a opět použijme vztah (3.3), tentokrát pro funkci

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = a_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x).$$

Dostaneme tak (pro každé  $\varepsilon > 0$ ):

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right) = - \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \underbrace{- \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_0}{\partial y_j}(x, y) \right)}_{=:\mathcal{A}_0 u_0} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \underbrace{- \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_0}{\partial y_j}(x, y) \right) - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x, y) \right)}_{=:\mathcal{A}_1 u_0} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x, y) \right) \right] + \varepsilon^0 \left[ \underbrace{- \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x, y) \right)}_{=:\mathcal{A}_2 u_0} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x, y) \right) - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x, y) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_2}{\partial y_j}(x, y) \right) \right] + \varepsilon [\dots] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = f(x) \quad \text{v } \Omega,
\end{aligned}$$

přičemž  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ . Dostáváme tedy rovnici

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A}_0 u_0 + \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}_0 u_1 + \mathcal{A}_1 u_0) + (\mathcal{A}_0 u_2 + \mathcal{A}_1 u_1 + \mathcal{A}_2 u_0) + \dots = f \quad \text{v } \Omega.$$

Ta bude splněna, budou-li rovny „koeficienty” příslušných mocnin  $\varepsilon$  na levé a pravé straně, tzn. bude-li platit:

$$\mathcal{A}_0 u_0 = 0 \quad \text{v } Y, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{A}_0 u_1 + \mathcal{A}_1 u_0 = 0 \quad \text{v } Y, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{A}_0 u_2 + \mathcal{A}_1 u_1 + \mathcal{A}_2 u_0 = f \quad \text{v } Y. \quad (3.7)$$

$$\vdots$$

V rovnicích (3.5)-(3.7) chápeme  $x \in \Omega$  jako parametr. Všimněme si, že neznámé funkce  $u_0$ ,  $u_1$  a  $u_2$  mohou být vyjádřeny postupně.

Začneme tedy od rovnice (3.5). Hledejme neznámou funkci  $u_0 = (x, y)$ , která je  $Y$ -periodická v proměnné  $y$ . Řešíme tedy periodickou úlohu

$$-\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_0}{\partial y_j}(x, y) \right) = 0 \quad \text{v } Y. \quad (3.8)$$

Tato rovnice má řešení<sup>4</sup>, které je určeno jednoznačně až na konstantu, což v tomto případě může být nějaká funkce proměnné  $x$ . Jedním z řešení (3.8) je zřejmě nulová funkce. Všechna řešení pak jsou nulová funkce plus konstanta respektive funkce proměnné  $x$ . Odtud vyplývá, že funkce  $u_0 = u_0(x)$  nezávisí na proměnné  $y$ . Platí tedy

$$\mathcal{A}_1 u_0 = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \right) = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{i,j}(y)).$$

Rovnici (3.6) pak lze přepsat do tvaru

$$-\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x, y) \right) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{i,j}(y)) \quad \text{v } Y, \quad (3.9)$$

kde neznámou je funkce  $u_1(x, y)$ , která je  $Y$ -periodická v proměnné  $y$ . Protože pro každé  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  platí díky periodicitě  $a_{i,j}(y)$ , že  $\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{i,j}(y)) dy = 0$ , má rovnice (3.10) řešení. Hledejme jej pomocí separace proměnných ve tvaru

$$u_1(x, y) = -\sum_{k=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x) \chi_k(y), \quad (3.10)$$

<sup>4</sup>Periodická rovnice má řešení právě tehdy, když integrál z pravé strany je nulový, což je v tomto případě zjevně splněno.

kde funkce  $\chi_k$  je  $Y$ -periodická. Dosadíme-li (3.10) do (3.9), získáme rovnici<sup>5</sup>

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y) \right) = \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x) \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{i,k}(y)) \quad \forall Y.$$

Odtud dostaneme rovnici pro  $\chi_k$  ( $k \in \{1, \dots, N\}$ )

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y) \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{i,k}(y)) \quad \forall Y. \quad (3.11)$$

Rovnice (3.7)

$$\mathcal{A}_0 u_2 = f(x) - \mathcal{A}_1 u_1 - \mathcal{A}_2 u_0 \quad \forall Y$$

má  $Y$ -periodické řešení  $u_2(x, y)$  splňuje-li pravá strana podmínku

$$\int_Y f(x) - \mathcal{A}_1 u_1 - \mathcal{A}_2 u_0 \, dy = 0.$$

Musí tedy platit

$$f(x) + \sum_{i,j=1}^N \int_Y \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x, y) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \right) \right) dy = 0,$$

$$f(x) + \sum_{i,j=1}^N \int_Y a_{i,j}(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x, y) + \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \right) dy + \\ + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x, y) \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} (a_{i,j}(y) u_1(x, y)) \, dy = 0.$$

S využitím periodicity  $a_{i,j}(y)$  a vztahu

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_j}(x, y) = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y)$$

<sup>5</sup>Zároveň na pravé straně rovnice (3.9) formálně nahradíme sčítací index  $j$  indexem  $k$ .

dostaneme

$$-\sum_{i,j=1}^N \int_Y a_{i,j}(y) \left( \sum_{k=1}^N \left( -\frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_k \partial x_i}(x) \right) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right) dy = f(x).$$

Vhodným seřazením členů podle příslušných derivací  $u_0$  dostaneme

$$-\sum_{i,k=1}^N \left[ \underbrace{\int_Y \left( a_{i,k}(y) - \sum_{j=1}^N a_{i,j}(y) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y) \right) dy}_{=: a_{i,k}^0 \in \mathbb{R}} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_k \partial x_i}(x) \right] = f(x), \quad (3.12)$$

kde  $\chi_k$  jsou řešeními periodické úlohy (3.11). Rovnici (3.12) pak ovšem můžeme zapsat ve tvaru

$$-\operatorname{div}(A^0 \nabla u_0(x)) = f(x),$$

což už je hledaná parciální diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, jejíž řešení  $u_0$  je právě první člen rozvoje (3.2) a pro  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  platí  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ .

*Poznámka 3.2.* Uvažujeme-li úlohu (3.1) s maticovou funkcí  $A$  danou předpisem

$$A(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} a(y_1) & 0 \\ 0 & b(y_1) \end{pmatrix},$$

kde  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jsou 1-periodické funkce, dostaneme (viz (3.11)) pro  $\chi_1(y_1, y_2)$  rovnici

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left( a(y_1) \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right) = a'(y_1).$$

Hledejme funkci  $\chi_1$  ve tvaru  $\chi_1(y_1, y_2) = \chi_1(y_1)$ , tzn. řešme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} (a(y_1) \chi_1'(y_1))' &= a'(y_1) \\ a(y_1) \chi_1'(y_1) &= a(y_1) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ \chi_1(y_1) &= 1 + \frac{c}{a(y_1)}. \end{aligned}$$



Pro  $\chi_2(y_1, y_2)$  máme rovnici

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left( a(y_1) \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_2} \left( b(y_1) \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) \right)}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial b}{\partial y_2}(y_1)}_{=0},$$

jejímž jedním z řešení je  $\chi_2 = 0$ . Koeficienty homogenizované matice  $A_0$  jsou proto dány vztahy

$$\begin{aligned} a_{1,1}^0 &= \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(y_1)} dy_1}, \\ a_{2,2}^0 &= \int_0^1 b(y_1) dy_1, \\ a_{1,2}^0 &= a_{2,1}^0 = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

### 3.2 Příklady

**Příklad 3.3.** Uvažujme úlohu (3.1) s maticovou funkcí  $A$  danou předpisem

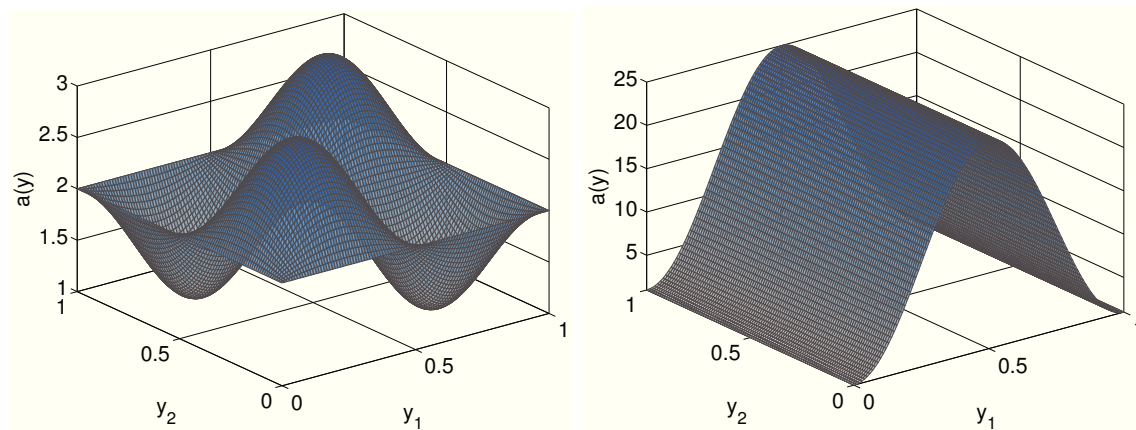
$$A(y) = \begin{pmatrix} a(y) & 0 \\ 0 & a(y) \end{pmatrix},$$

kde  $a(y) = a(y_1, y_2) = 2 + \sin(2\pi y_1) \cdot \sin(2\pi y_2)$ , viz obrázek 3.1a. Funkce  $\chi_1$  a  $\chi_2$  musí podle (3.11) splňovat rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} \left( a(y) \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}(y) \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left( a(y) \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}(y) \right) &= \frac{\partial a}{\partial y_1}(y) = 2\pi \cos(2\pi y_1) \cdot \sin(2\pi y_2), \\ \frac{\partial}{\partial y_1} \left( a(y) \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}(y) \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left( a(y) \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}(y) \right) &= \frac{\partial a}{\partial y_2}(y) = 2\pi \sin(2\pi y_1) \cdot \cos(2\pi y_2). \end{aligned}$$

Koeficienty homogenizované matice  $A^0$  pak jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} a_{1,1}^0 &= \int_Y a(y) dy - \int_Y a(y) \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}(y) dy, \\ a_{2,2}^0 &= \int_Y a(y) dy - \int_Y a(y) \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}(y) dy, \\ a_{1,2}^0 &= - \int_Y a(y) \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}(y) dy, \\ a_{2,1}^0 &= - \int_Y a(y) \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2}(y) dy. \end{aligned}$$



(a) Příklad 3.3.

(b) Příklad 3.4.

Obrázek 3.1: Příklad 3.3 a 3.4: funkce  $a_z(y)$ .

**Příklad 3.4.** Uvažujme úlohu (3.1) s maticovou funkcí  $A$  danou předpisem

$$A(y) = \begin{pmatrix} a(y_1) & 0 \\ 0 & a(y_1) \end{pmatrix}, \text{ kde } a(y_1) = 13 - 12 \cos(2\pi y_1),$$

viz obr. 3.1b. Podle (3.13) je tedy  $A^0$  dána vztahy

$$\begin{aligned} a_{1,1}^0 &= \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a_z(y_1)} dy_1} = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{13-12\cos(2\pi y_1)} dy_1} = 5, \\ a_{2,2}^0 &= \int_0^1 a_z(y_1) dy_1 = \int_0^1 13 - 12 \cos(2\pi y_1) dy_1 = 13, \\ a_{1,2}^0 &= a_{2,1}^0 = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

## 4 Dvojškálová konvergence

V roce 1989 byl (viz [17]) publikován nový přístup k homogenizaci parciálních diferenciálních rovnic, pomocí tzv. *dvojškálové konvergence*. Následující text je založen zejména na pracích [1, 14, 16], kde je toto téma přehledně zpracováno.

Víme, že z každé omezené posloupnosti  $(u_n)$  v  $L^2(\Omega)$  lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost (značme ji stejně). Existuje tedy  $u \in L^2(\Omega)$  takové, že pro všechna  $v \in L^2(\Omega)$  platí

$$\int_{\Omega} u_n(x) v(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx. \quad (4.1)$$

Pokud však nahradíme  $v$  omezenou posloupností  $(v_n)$  v  $L^2(\Omega)$  situace se značně komplikuje. Vztah

$$\int_{\Omega} u_n(x) v_n(x) \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx, \quad (4.2)$$

kde  $u$  a  $v$  jsou slabé limity  $(u_n)$  a  $(v_n)$ , totiž obecně neplatí pro všechny slabě konvergentní posloupnosti  $(u_n)$  a  $(v_n)$  v  $L^2(\Omega)$ .

**Příklad 4.1.** Necht'  $(u_n), (v_n) \subset L^2(\Omega)$  jsou posloupnosti definované předpisy

$$u_{\varepsilon_n}(x) = v_{\varepsilon_n}(x) := \sin(2\pi nx).$$

Slabou limitou obou posloupností nulová funkce, ale jejich součin

$$u_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n} = \sin^2(2\pi nx) = \frac{1}{2} [1 - \cos(4\pi nx)]$$

slabě konverguje v  $L^2(\Omega)$  ke konstantní funkci  $\frac{1}{2}$ . Navíc pro

$$v_{\varepsilon_n}(x) := \sin(2\pi nx - \alpha)$$

může (zvolíme-li vhodné  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) součin  $u_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}$  slabě konvergovat k libovolné konstantní funkci, jejíž hodnota je z intervalu  $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ . Slabá konvergence totiž nezachovává informaci o lokálním chování funkcí  $u_{\varepsilon_n}$ .

Jedním ze způsobů jak zajistit platnost (4.2) je zpřísnit předpoklady a požadovat, aby alespoň jedna z posloupností  $(u_n), (v_n)$  konvergovala silně. Pro některé posloupnosti periodických funkcí však můžeme popsat limitní chování pomocí tzv. dvojškálové konvergence, která odráží chování funkcí i v mikroskopickém měřítku, ale zároveň nevyžaduje silnou konvergenci.

#### 4.1 Definice a vlastnosti

**Definice 4.2.** Necht'  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ ,  $(u_{\varepsilon_n}) \subset L^2(\Omega)$  a  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ . Řekneme, že posloupnost funkcí  $(u_{\varepsilon_n})$  dvojškálově konverguje k  $u_0$  (značíme  $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2} u_0$ ), pokud platí:

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx \quad (4.3)$$

pro libovolné  $\psi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$ .

*Poznámka 4.3.* Dvojškálovou konvergencí vektorové funkce rozumíme dvojškálovou konvergenci po složkách.

V dalším vždy předpokládáme, že  $(u_{\varepsilon_n}) \subset \mathbb{R}$  je taková posloupnost, že  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ .

*Poznámka 4.4.* Všimněme si, že dvojškálová limita je dána jednoznačně. Pro důkaz stačí uvažovat posloupnost  $(u_{\varepsilon_n}) \subset L^2(\Omega)$  a funkce  $u_0, v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ , že pro každé  $\psi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx &\rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx, \\ \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx &\rightarrow \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \psi(x, y) dy dx, \end{aligned}$$

Zřejmě pak platí

$$\int_{\Omega} \int_Y [u_0(x, y) - v_0(x, y)] \psi(x, y) dy dx = 0,$$

odkud vyplývá, že  $u_0(x, y) = v_0(x, y)$  skoro všude.

Pro posloupnost  $(u_{\varepsilon_n})$  v  $L^2(\Omega)$  máme nyní tři druhy konvergence: silnou, slabou a dvojškálovou. Vztahy mezi těmito konverencemi můžeme zapsat symbolicky:

$$[u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0] \implies \left[ u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2} u_0 \right] \implies [u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0] \quad (4.4)$$

Implikace 4.4 popisují věty 4.5 a 4.6. Lze ukázat, že opačné implikace neplatí.

**Věta 4.5.** Necht'  $(u_{\varepsilon_n}) \subset L^2(\Omega)$  (silně) konverguje k  $u_0$  v  $L^2(\Omega)$ .

Pak  $(u_{\varepsilon_n})$  konverguje dvojškálově k  $u_0(x, y) := u_0(x)$ .

**Důkaz.** Necht'  $\psi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  je dána libovolně. Pak platí

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_0(x) \psi(x, y) dy dx \right| &= \left| \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} u_0(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx + \int_{\Omega} u_0(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_0(x) \psi(x, y) dy dx \right| \leq \\ &\leq \|u_{\varepsilon_n} - u_0\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} u_0(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx - \int_{\Omega} \int_Y u_0(x) \psi(x, y) dy dx \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

protože posloupnost  $(u_{\varepsilon_n})$  je podle předpokladů omezená,  $u_0(x) \psi(x, y) \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  a podle lemmatu 1.12 je i posloupnost  $\left(\psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right)\right)$  omezená.  $\square$

**Věta 4.6.** Necht' posloupnost  $(u_{\varepsilon_n}) \subset L^2(\Omega)$  dvojškálově konverguje k  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ .

Pak  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$  v  $L^2(\Omega)$ , kde  $u(x) = \int_Y u_0(x, y) dy$ .

**Důkaz.** Pokud v definici 4.2 volíme testovací funkce závislé pouze na  $x$ , dostaneme přímo definici slabé konvergence  $u_{\varepsilon_n}$  k  $u(x) = \int_Y u_0(x, y) dy$  v  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

**Poznámka 4.7.** Pro platnost lemmatu 4.6 je klíčová volba prostoru testovacích funkcí. Následující příklad ukazuje, že v (4.3) nestačí volit testovací funkce pouze z prostoru  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))$ .

**Příklad 4.8.** Necht'  $\Omega = (0, 1)$ ,  $u(x, y) = 0$  a

$$u_{\varepsilon_n} := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_n}, & 0 < x \leq \varepsilon_n, \\ 0, & \varepsilon < x < 1. \end{cases}$$

Pak pro libovolné  $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))$  platí

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx = 0,$$

ale  $(u_{\varepsilon_n})$  není omezená a nekonverguje slabě k  $u_0 = 0$  v  $L^2(\Omega)$  (stačí volit funkcionál  $g \equiv 1$ , protože potom

$$\int_0^1 u_{\varepsilon_n} g dx \rightarrow 1 \neq 0 = \int_0^1 u_0 g dx).$$

Lze ukázat, že pro platnost lemmatu 4.6 nestačí volit funkce ani z většího prostoru  $\mathcal{C}(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))$ , viz [14]. Následující tvrzení však ukazuje, že v definici 4.2 lze prostor

$L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  nahradit prostorem  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))$ , předpokládáme-li navíc omezenost posloupnosti  $(u_{\varepsilon_n})$ .

**Tvrzení 4.9.** *Nechť  $(u_{\varepsilon_n})$  je omezená posloupnost v  $L^2(\Omega)$  taková, že pro libovolné  $\psi(x, y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))$  platí*

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx.$$

*Pak  $(u_{\varepsilon_n})$  konverguje dvojškálově k  $u_0$ .*

**Lemma 4.10.** *Nechť  $(u_{\varepsilon_n}) \subset L^2(\Omega)$  je omezená posloupnost.*

*Pak existuje vybraná posloupnost  $(u_{\varepsilon_{n'}})$  a  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$  takové, že  $u_{\varepsilon_{n'}} \xrightarrow{2} u_0$ .*

*Důkaz.* Nechť  $(u_{\varepsilon_n}) \subset L^2(\Omega)$  je taková posloupnost, že

$$(\exists c > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) : \|u_{\varepsilon_n}\| \leq c.$$

Definujeme posloupnost lineárních funkcionalů  $(F_{\varepsilon_n}) \subset (L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y)))^*$

$$F_{\varepsilon_n}(\psi) := \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx.$$

Z omezenosti  $(u_{\varepsilon_n})$ , Cauchy-Schwartzovy nerovnosti a lemmatu (1.12) vyplývá

$$|F_{\varepsilon_n}(\psi)| = \left| \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \right| \leq c \left\| \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\psi(x, y)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))}.$$

Posloupnost  $(F_{\varepsilon_n})$  je tedy omezená a prostor  $L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  je Banachův, takže podle Alaougluovy věty (viz [15] str. 69) existuje posloupnost vybraná z  $(F_{\varepsilon_n})$  (značme ji stejně) a  $F_0 \in (L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y)))^*$  takové, že

$$F_{\varepsilon_n} \rightharpoonup F_0 \text{ slabě* v } (L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y)))^*.$$

Platí tedy

$$\forall \psi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y)) : F_{\varepsilon_n}(\psi) \rightarrow F_0(\psi),$$

a

$$|F_0(\psi)| \leq c \|\psi(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)}.$$

Prostor  $L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  je hustý v  $L^2(\Omega \times Y)$  (viz. lemma (1.12)), takže můžeme  $F_0$  spojitě rozšířit na  $L^2(\Omega \times Y)$ . Tento rozšířený funkcional označme  $F$ . Prostor  $L^2(\Omega \times Y)$  je

Hilbertův, takže díky Rieszově větě můžeme  $F$  ztotožnit s prvkem  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ . Pro všechna  $\psi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$  tedy platí

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx = F_{\varepsilon_n} \rightarrow F(\psi) = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx.$$

□

Následující dvě tvrzení ukazují, že pokud  $(u_{\varepsilon_n})$  dvojškálově konverguje k  $u_0$ , pak vztah (4.3) platí i pro testovací funkce z jiných prostorů než  $L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$ .

**Tvrzení 4.11.** *Necht'  $(u_{\varepsilon_n})$  je posloupnost v  $L^2(\Omega)$ , která dvojškálově konverguje k funkci  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ .*

*Pak pro libovolné  $\psi(x, y) \in L^2_{per}(\Omega; \mathcal{C}(Y))$  platí*

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx.$$

**Tvrzení 4.12.** *Necht'  $(u_{\varepsilon_n})$  je posloupnost v  $L^2(\Omega)$ , která dvojškálově konverguje k funkci  $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ .*

*Pak pro každou funkci ve tvaru  $\psi(x, y) = \psi_1(y) \psi_2(x, y)$ , kde  $\psi_1 \in L^{\infty}_{per}(Y)$*

*a  $\psi_2 \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$ , platí*

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dy dx.$$

Důkazy tvrzení 4.11 a 4.12 lze najít např. v [14].

## 4.2 Dvojškálová konvergence pro posloupnosti z $H^1_0(\Omega)$

Na závěr přehledu základních vlastností dvojškálové konvergence si uvedme lemma týkající se dvojškálové konvergence v  $H^1_0(\Omega)$ , které využijeme v důkazu věty 5.1.

**Lemma 4.13.** *Necht'  $(u_{\varepsilon_n}) \subset H^1_0(\Omega)$  a  $u_0 \in H^1_0(\Omega)$  jsou takové, že  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$  v  $H^1_0(\Omega)$ .*

*Pak platí:*

- $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2} \widetilde{u_0}(x, y) := u_0(x)$ ,
- existuje  $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{per}(Y))$  a posloupnost  $(u_{\varepsilon_{n'}})$  vybraná z  $(u_{\varepsilon_n})$  taková, že

$$\nabla u_{\varepsilon_{n'}} \xrightarrow{2} \nabla_x u_0 + \nabla_y u_1.$$

*Důkaz.* Pro posloupnost  $(u_{\varepsilon_n})$  platí (po případném vybrání), viz lemma 4.10:

$$u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2} \widetilde{u}_0 \in L^2(\Omega \times Y),$$

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2} U \in (L^2(\Omega \times Y))^N,$$

takže pro libovolné  $\psi \in [\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))]^N$  platí

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon_n}(x) \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y U(x, y) \cdot \psi(x, y) dy dx. \quad (4.5)$$

Uvažujeme-li  $\nabla u_{\varepsilon_n}$  jako distribuci, platí

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon_n}(x) \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) + \frac{1}{\varepsilon_n} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right] dx. \quad (4.6)$$

Po vynásobení této rovnosti  $\varepsilon_n$  a následnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx &= \\ &= \varepsilon_n \left[ - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx - \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon_n}(x) \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Limitním přechodem  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  a s využitím (4.5) dostaneme

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_Y \widetilde{u}_0(x, y) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i}(x, y) dy dx = 0.$$

Po úpravě pomocí Greenovy věty pro libovolné  $[\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega \times Y)]^N$  platí

$$\int_{\Omega} \int_Y \nabla_y \widetilde{u}_0(x, y) \cdot \psi(x, y) dy dx = 0,$$

takže  $\nabla_y u_0 = 0$  skoro všude v  $\Omega \times Y$ . Funkce  $\widetilde{u}_0$  tedy nezávisí na  $y$ , a proto  $\widetilde{u}_0(x, y) = u_0(x)$  (viz věta 4.6 a předpoklad  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(\Omega)$ , takže  $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0$  v  $L^2(\Omega)$ ). Pokud nyní zvolíme funkce  $\psi \in [\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))]^N$  takové, že

$$\operatorname{div}_y \psi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi_i}{\partial y_i} = 0,$$



dostaneme z (4.6) s využitím dvojškálové konvergence  $(u_{\varepsilon_n})$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon_n}(x) \cdot \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx &= - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_{\varepsilon_n}(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \rightarrow \\ &\rightarrow - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \int_Y u_0(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}(x, y) dy dx = \int_{\Omega} \int_Y \nabla u_0(x) \cdot \psi(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Porovnáním s (4.5) dostaneme pro libovolnou funkci  $\psi \in [\mathcal{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{C}_{per}^\infty(Y))]^N$  takovou, že  $\operatorname{div}_y \psi = 0$ , vztah

$$\int_{\Omega} \int_Y [U(x, y) - \nabla u_0(x)] \cdot \psi(x, y) dy dx = 0,$$

takže existuje právě jedna funkce<sup>6</sup>  $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_{per}(Y))$  taková, že

$$U(x, y) = \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y).$$

□

---

<sup>6</sup>Zde využíváme faktu, že pokud  $\int_Y F \varphi dy = 0$  pro libovolné  $\varphi$  takové, že  $\operatorname{div} \varphi = 0$ , pak  $F$  je gradient (viz [10] str. 29). V tomto případě  $F(x, y) = U(x, y) - \nabla u_0(x)$ .



## 5 Homogenizační teorém pro PDR

V části 3 jsme za přísných požadavků na funkce  $a$ ,  $f$  a oblast  $\Omega$  našli předpis pro koeficienty homogenizované matice  $A^0$ . V této části pomocí dvojškálové konvergence dokážeme, že takto získaná homogenizovaná matice vyhovuje i při obecněji zadaných úlohách. Uvedený důkaz homogenizačního teorému je kombinací důkazů uvedených v pracích [7, 18].

### 5.1 Formulace úlohy

**Věta 5.1** (Homogenizační teorém pro PDR). *Nechť  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha \leq \beta$ ,  $A \in M_{per}(\alpha, \beta, \Omega)$  a  $f \in L^2(\Omega)$ . Označme pro každé  $\varepsilon > 0$   $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  a  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  slabé řešení úlohy*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{v } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

*Nechť  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  je slabé řešení homogenizovaného problému*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u_0) = f & \text{v } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

*kde*

$$A^0 = \int_Y \left( A(y) - A(y) (\nabla_y \chi(y))^T \right) dy \quad (5.3)$$

*a funkce  $\chi(y)$  je řešením problému*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla_y \chi(y) (A(y))^T) = \operatorname{div}_y (A(y))^T & \text{v } Y, \\ \chi(y) \text{ je } Y\text{-periodická.} \end{cases} \quad (5.4)$$

*Pak pro každou posloupnost  $(\varepsilon_n)$  takovou, že  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ , platí  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(\Omega)$ .*

**Definice 5.2.** Slabým řešením úlohy (5.1) rozumíme funkci  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  takovou, že

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \quad (5.5)$$

*Poznámka 5.3.* Všimněme si, že prvky homogenizované matice  $A^0$  jsou podle (5.3) dány vztahem

$$a_{i,k}^0 = \int_Y \left( a_{i,k}(y) - \sum_{j=1}^N a_{i,j}(y) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y) \right),$$

což je stejný předpis jako v (3.12).

## 5.2 Důkaz homogenizačního teorému pro PDR

Pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  existuje podle Lax-Milgramova lemmatu právě jedno slabé řešení  $u_{\varepsilon_n} \in H_0^1(\Omega)$  úlohy (5.1). Navíc platí

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Posloupnost  $(u_{\varepsilon_n})$  je tedy omezená v reflexivním prostoru  $H_0^1(\Omega)$ , a proto existuje posloupnost vybraná z  $(u_{\varepsilon_n})$  (značme ji stejně) a  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  takové, že

- (i)  $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$  v  $H_0^1(\Omega)$ ,
- (ii)  $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0$  v  $L^2(\Omega)$ .

Podle lemmatu 4.13 posloupnost  $(u_{\varepsilon_n})$  dvojškálově konverguje k  $u_0$  a navíc existuje posloupnost vybraná z  $(u_{\varepsilon_n})$  (opět ji značme stejně) a  $u_1 \in L^2(\Omega; H_{per}(Y))$  takové, že

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2} \nabla_x u_0 + \nabla_y u_1.$$

Nechť  $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$  a  $v_1 \in C_0^\infty(\Omega; C_{per}^\infty(Y))$ . Pro všechna  $n$  můžeme funkci  $v_0(x) + \varepsilon_n v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right)$  použít jako testovací funkci v (5.5):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (A^{\varepsilon_n} \nabla u_{\varepsilon_n}) \cdot \left( \nabla_x v_0(x) + \varepsilon_n \nabla_x v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) + \nabla_y v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right) dx = \\ = \int_{\Omega} f \left( v_0(x) + \varepsilon_n v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right) dx. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Úpravou rovnice (5.6) dostaneme

$$I_1 + \varepsilon_n I_2 = \int_{\Omega} f \left[ v_0(x) + \varepsilon_n v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right] dx, \quad (5.7)$$

kde

$$I_1 = \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon_n} \cdot \left[ (A^{\varepsilon_n})^T \left( \nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right) \right] dx,$$

$$I_2 = \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon_n} \cdot \left[ (A^{\varepsilon_n})^T \nabla_x v_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \right] dx.$$

Funkce  $(A^{\varepsilon_n})^T \left[ \nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \right]$  je ve tvaru  $\psi(x, y) = \psi_1(y) \psi_2(x, y)$ , kde  $\psi_1(y) = (A^{\varepsilon_n})^T \in L_{per}^{\infty}(Y)$  a  $\psi_2(x, y) = \nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_{per}(Y))$ , takže podle tvrzení 4.12 můžeme  $\psi(x, y)$  použít jako testovací funkci v (4.3), takže platí

$$I_1 \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot \left[ (A(y))^T (\nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)) \right] dy dx. \quad (5.8)$$

Obdobně pro  $(A^{\varepsilon_n})^T \nabla_x v_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon_n} \right)$ . S využitím omezenosti  $(A^{\varepsilon_n} \nabla u_{\varepsilon_n})$  a Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\varepsilon_n I_2 \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

Dále zřejmě platí  $\left( v_0(x) + \varepsilon_n v_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \right) \rightharpoonup v_0$  v  $H_0^1(\Omega)$ , takže

$$\int_{\Omega} f \left( v_0(x) + \varepsilon_n v_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \right) dx \rightarrow \int_{\Omega} f v_0(x) dx. \quad (5.10)$$

Dosazením (5.8), (5.9) a (5.10) do (5.7) a úpravou dostaneme pro  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$

$$\int_{\Omega} \int_Y [A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))] \cdot [\nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)] dy dx = \int_{\Omega} f v_0(x) dx. \quad (5.11)$$

Definujme na prostoru  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  (viz lemma 1.11) bilineární formu

$$a(U, V) := \int_{\Omega} \int_Y [A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))] \cdot [\nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)] dy dx,$$

kde  $U = (u_0, u_1)$  a  $V = (v_0, v_1)$ . S využitím omezenosti  $A$  a Cauchy-Schwartzovy nerovnosti dostaneme pro všechna  $U, V \in \mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} a(U, V) &= \int_{\Omega} \int_Y [A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))] \cdot [\nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)] dy dx \leq \\ &\leq \beta \int_{\Omega} \int_Y (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)) dy dx \leq \beta \|U\|_{\mathcal{H}} \|V\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

protože

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y \nabla_x u_0(x) \cdot \nabla_y v_1(x, y) \, dy \, dx &= \int_{\Omega} \left[ \int_Y \nabla_y (\nabla_x u_0(x) v_1(x, y)) \, dy \right] dx = \\ &= \int_{\Omega} \left[ \int_{\partial Y} (\nabla_x u_0(x) v_1(x, y) n(y)) \, ds_y \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathcal{H} : a(V, V) &\geq \alpha \|\nabla_x v_0(x) + \nabla_y v_1(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \geq \\ &\geq \alpha \|\nabla_x v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla_y v_1\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Bilineární forma  $a(U, V)$  je tedy spojitá a eliptická. Je zřejmé, že funkcionál

$$F(v_0, v_1) := \int_{\Omega} f v_0(x) \, dx$$

je lineární a spojitý na  $\mathcal{H}$ , proto podle Lax-Milgramova lemmatu 1.14 existuje právě jeden prvek  $U \in \mathcal{H}$ , a to  $U = (u_0, u_1)$ , takový, že

$$\forall V \in \mathcal{H} : a(U, V) = F(V). \quad (5.12)$$

To znamená, že pro každé  $V \in \mathcal{H}$  platí (5.11). Speciálně volíme-li do (5.11) postupně  $v_0 \equiv 0$  a  $v_1 \equiv 0$  dostaneme ekvivalentní problém

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))) = 0 & \text{v } \Omega \times Y, \\ -\operatorname{div}_x (\int_Y A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \, dy) = f & \text{v } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{na } \partial\Omega, \\ u_1(x, y) \text{ je } Y\text{-periodická v } y. \end{cases} \quad (5.13)$$

Funkci  $u_1$  vyjádříme pomocí funkce  $\nabla u_0$  a neznámé vektorové funkce  $\chi \in H_{per}(Y)$  ve tvaru

$$u_1(x, y) = -\chi(y) \cdot \nabla_x u_0(x) = -\sum_{j=1}^N \chi_j(y) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}. \quad (5.14)$$

Dosazením (5.14) do první rovnice v (5.13) dostaneme

$$\operatorname{div}_y (\nabla_y \chi(y) (A(y))^T) \cdot \nabla_x u_0(x) = \operatorname{div}_y (A(y))^T \cdot \nabla_x u_0(x).$$

Tato rovnost je splněna právě tehdy, když  $\chi$  je řešením problému (5.4).

Dosazením (5.14) do druhé rovnice v (5.13) dostaneme

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}_x \left( \int_Y A(y) \left( \nabla_x u_0(x) - \nabla_y (\chi(y))^T \nabla_x u_0(x) \right) dy \right) &= f \\
 -\operatorname{div}_x \left( \int_Y A(y) \left( I - \nabla_y (\chi(y))^T \right) dy \right) \nabla_x u_0(x) &= f \\
 -\operatorname{div}_x (A^0(y) \nabla_x u_0(x)) &= f. \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Toto je ovšem homogenizovaná rovnice (5.2), kde koeficienty matice  $A^0$  jsou dány vztahem (5.3).

Ukázali jsme funkce  $u_0$ , která je řešením (5.2), a  $u_1$  (daná vztahem (5.14)) řeší problém (5.13), který je ekvivalentní s (5.12). Zároveň však víme, že existuje právě jedno řešení tohoto problému, takže funkce  $u_0$  je limitou jisté vybrané posloupnosti z  $(u_{\varepsilon_n})$ . Odtud pomocí obdobné úvahy jako v důkazu věty (2.1) vyplývá, že  $u_0$  je slabou limitou  $(u_{\varepsilon_n})$ .  $\square$





## 6 Řešení homogenizačních úloh ve 2D

V této kapitole naznačíme praktické řešení homogenizačních úloh ve 2D pomocí metody konečných prvků a metody hraničních prvků. Uvažujme modelovou úlohu (5.1):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{v } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

kde  $\Omega$  je jednotkový čtverec v  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  je daná funkce z  $L^2(\Omega)$  a  $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , kde

$$A \in M_{\text{per}}(\alpha, \beta, \Omega), \quad A(y) := \begin{pmatrix} a(y) & 0 \\ 0 & a(y) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Základním úkolem je najít homogenizovanou matici  $A^0$  a následně případně řešit úlohu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u_0) = f & \text{v } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Podle věty 5.1 musíme nejprve najít funkci  $\chi$ , která řeší úlohu (5.4), což v tomto případě znamená najít pro  $k = 1, 2$  funkce  $\chi^{(k)}$ , které splňují

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(y) \nabla \chi^{(k)}(y)) = -\frac{\partial a(y)}{\partial y_k} & \text{v } Y, \\ \chi^{(k)} \text{ je } Y\text{-periodická.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Koeficienty homogenizované matice pak budou dány vztahem

$$a_{i,k}^0 = \int_Y \left( a_{i,k}(y) - \sum_{j=1}^N a_{i,j}(y) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j}(y) \right) dy. \quad (6.4)$$

### 6.1 Řešení pomocí MKP

Funkce  $\chi^{(k)}$  je slabým řešením úlohy (6.3), pokud platí:

- $\chi^{(k)} \in H_{\text{per}}(Y)$ ,
- $\int_Y a(y) \nabla \chi^{(k)}(y) \nabla v(y) dy = \int_Y a(y) \frac{\partial v}{\partial y_k} dy \quad \forall v \in H_{\text{per}}(Y),$

nebo ekvivalentně

- $\chi^{(k)} \in H_{per}(Y)$ ,
- $J(\chi^{(k)}) = \min_{\chi^{(k)} \in H_{per}(Y)} \left\{ \frac{1}{2} \int_Y a(y) \|\nabla \chi^{(k)}(y)\|^2 dy - \int_Y a(y) \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial y_j} dy \right\}.$

Uvažujme diskretizaci čtvercové oblasti  $Y$  na standardní pravidelnou trojúhelníkovou síť s  $n_1 \times n_2$  vrcholy  $x_i$ , kde  $i \in \{1, \dots, n := n_1 n_2\}$ , a pravoúhlými trojúhelníky  $T_i$ , kde  $i \in \{1, \dots, m := 2(n_1 - 1)(n_2 - 1)\}$ . Hledejme funkce  $\overline{\chi^{(k)}}$  jako spojité po částech (na trojúhelnících) lineární aproximace funkcí  $\chi^{(k)}$ . Tyto funkce  $\overline{\chi^{(k)}}$  můžeme vyjádřit jako lineární kombinace báзовých funkcí. Výše zmíněné formulace slabého řešení vedou po diskretizaci na sedlobodovou úlohu:

$$A\overline{\chi^{(k)}} + B^T \overline{\lambda} = \overline{b^{(k)}}, \quad (6.5)$$

kde  $A$  je matice tuhosti sestavená z lokálních matic tuhosti  $A_{lok}$ ,  $B$  je matice sestavená z podmínek  $Y$ -periodicity:

$$\overline{\chi^{(k)}}_i - \overline{\chi^{(k)}}_j = 0 \text{ pro } i, j : x_i \in \{(x, y) \in \Omega : y = 0\}, x_j \in \{(x, y) \in \Omega : y = 1\},$$

$$\overline{\chi^{(k)}}_i - \overline{\chi^{(k)}}_j = 0 \text{ pro } i, j : x_i \in \{(x, y) \in \Omega : x = 0\}, x_j \in \{(x, y) \in \Omega : x = 1\},$$

vektor  $\overline{b^{(k)}}$  je sestaven z rovnic

$$b_{lok} = a_\ell \int_{T_\ell} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} dy,$$

kde  $\varphi_i$  jsou báзовé funkce a  $a_\ell$  je diskretizovaná hodnota  $a(y)$  v trojúhelníku  $T_\ell$ .

Výpočet  $\overline{\chi^{(k)}}$  pro  $k = 1, 2$  se bude lišit jen ve vektoru pravé strany  $\overline{b^{(k)}}$ . Rovnici (6.5) vyjádříme ve vhodnějším tvaru

$$M\widetilde{\chi^{(k)}} = \widetilde{b^{(k)}}, \quad (6.6)$$

kde

$$M := \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\chi^{(k)}} := \begin{pmatrix} \overline{\chi_j^{(k)}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{b^{(k)}} := \begin{pmatrix} \overline{b^{(k)}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hledané funkce  $\overline{\chi^{(k)}}$  v diskretizovaném tvaru dostaneme jako prvních  $n$  složek řešení (6.6). Diagonální prvky  $A^0$  určíme ze vztahu (6.4):

$$a_{k,k}^0 = \int_Y \left( a(y) - a(y) \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial y_k}(y) \right) dy = \sum_{\ell=1}^m \left[ \left( a_\ell - a_\ell \frac{\partial \overline{\chi^{(k)}}}{\partial y_i} \right) |T_\ell| \right], \quad k = 1, 2,$$

a prvky mimo diagonálu

$$a_{i,k}^0 = \int_Y a(y) \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial y_i}(y) dy \doteq \sum_{\ell=1}^m \left[ a_\ell \frac{\partial \overline{\chi^{(k)}}}{\partial y_i} |T_\ell| \right] \quad k = 1, 2, k \neq i,$$

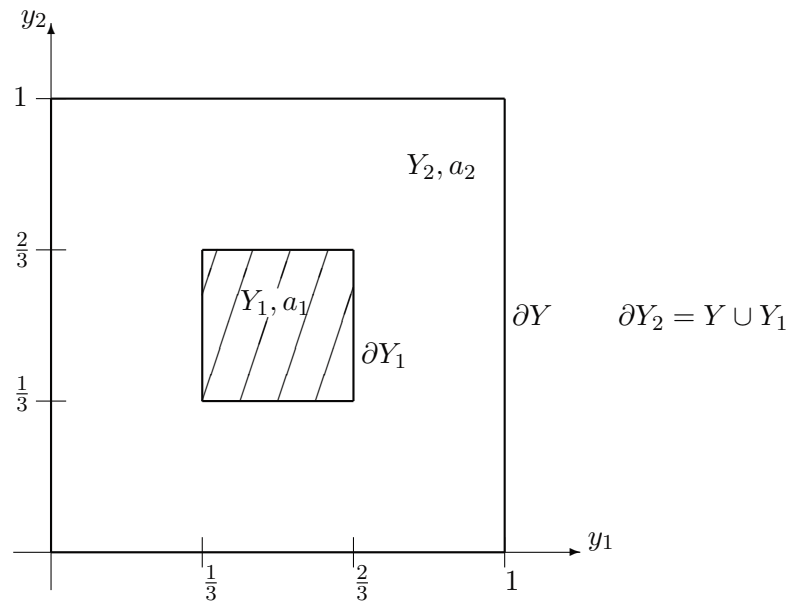
kde  $|T_\ell|$  je obsah trojúhelníku  $T_\ell$ .

## 6.2 Řešení pomocí MHP

V praxi se kompozitní materiály často skládají ze dvou homogenních materiálů různých vlastností. Tuto situaci můžeme v úloze (6.1) modelovat pomocí funkce  $a(y)$  která nabývá konstantních hodnot, a to  $a_1 > 0$  na  $Y_1$  a  $a_2 > 0$  na  $Y_2 = Y - Y_1$  (viz obr.6.1). V následujících úvahách budeme postupovat bez přesného stanovení předpokladů. Získané vztahy pak numericky ověříme v části 7.

Uvažujme pro  $k \in \{1, 2\}$  funkci  $\chi^{(k)} \in H_{per}(Y)$ , která splňuje rovnici

$$\int_Y a \nabla \chi^{(k)} \cdot \nabla v dy = \int_Y a \frac{\partial v}{\partial y_k} dy, \quad \forall v \in H_{per}(Y). \quad (6.7)$$



Obrázek 6.1: Zadání funkce  $a(y)$  pro kompozitní materiál.

Levou stranu rovnice upravíme s využitím první Greenovy identity a periodicity funkce  $a$  na oblasti  $Y$ :

$$\begin{aligned}
 \int_Y a \nabla \chi^{(k)} \cdot \nabla v \, dy &= a_1 \int_{Y_1} \nabla \chi_1^{(k)} \cdot \nabla v \, dy + a_2 \int_{Y_2} \nabla \chi_2^{(k)} \cdot \nabla v \, dy \\
 &= \underbrace{a_1 \int_{Y_1} \left( -\Delta \chi_1^{(k)} \right) v \, dy}_{=0} + a_1 \int_{\partial Y_1} \frac{\partial \chi_1^{(k)}}{\partial n_{Y_1}} v \, ds_y - \underbrace{a_2 \int_{Y_2} \Delta \chi_2^{(k)} v \, dy}_{=0} \\
 &\quad + a_2 \int_{\partial Y_2} \frac{\partial \chi_2^{(k)}}{\partial n_{Y_2}} v \, ds_y \\
 &= \int_{\partial Y_1} \left( a_1 \frac{\partial \chi_1^{(k)}}{\partial n_{Y_1}} + a_2 \frac{\partial \chi_2^{(k)}}{\partial n_{Y_2}} \right) v \, dy + \underbrace{a_2 \int_{\partial Y} \frac{\partial \chi_2^{(k)}}{\partial n_{Y_2}} v \, ds_y}_{=0}.
 \end{aligned}$$

Podobně upravíme i pravou stranu

$$\begin{aligned}
 \int_Y a \frac{\partial v}{\partial y_k} \, dy &= a_1 \int_{Y_1} 1 \cdot \frac{\partial v}{\partial y_k} \, dy + a_2 \int_{Y_2} 1 \cdot \frac{\partial v}{\partial y_k} \, dy \\
 &= \underbrace{a_1 \int_{Y_1} \left( -\frac{\partial 1}{\partial y_k} \right) v \, dy}_{=0} + a_1 \int_{\partial Y_1} v (n_{Y_1})_k \, ds_y + \underbrace{a_2 \int_{Y_2} \left( -\frac{\partial 1}{\partial y_k} \right) v \, dy}_{=0} \\
 &\quad + a_2 \int_{\partial Y_2} v (n_{Y_2})_k \, ds_y \\
 &= \int_{\partial Y_1} (a_1 (n_{Y_1})_k + a_2 (n_{Y_2})_k) v \, ds_y + \underbrace{a_2 \int_{\partial Y} v (n_{Y_2})_k \, ds_y}_{=0} \\
 &= \int_{\partial Y_1} (a_2 - a_1) (n_{Y_2})_k v \, ds_y.
 \end{aligned}$$

Dostáváme tedy úlohu

$$\begin{cases} -\Delta \chi_1^{(k)} = 0 & \text{v } Y_1, & (6.8a) \\ -\Delta \chi_2^{(k)} = 0 & \text{v } Y_2, & (6.8b) \\ \chi_1^{(k)} = \chi_2^{(k)} & \text{na } \partial Y_1, & (6.8c) \\ a_1 \frac{\partial \chi_1^{(k)}}{\partial n_{Y_1}} + a_2 \frac{\partial \chi_2^{(k)}}{\partial n_{Y_2}} = (a_2 - a_1) (n_{Y_2})_k & \text{na } \partial Y_1, & (6.8d) \\ \chi_2^{(k)} \text{ vyhovuje periodickým okrajovým podmínkám} & \text{na } \partial Y. & (6.8e) \end{cases}$$

### Hraniční integrální rovnice

Funkce  $\chi_1^{(k)}$  a  $\chi_2^{(k)}$  vyjádříme pomocí potenciálu jednoduché vrstvy

$$\forall \tilde{x} \in Y_1 : \chi_1^{(k)}(\tilde{x}) = \int_{\partial Y_1} q_1^{(k)}(y) G(\tilde{x}, y) ds_y, \quad (6.9)$$

$$\forall \tilde{x} \in Y_2 : \chi_2^{(k)}(\tilde{x}) = \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) G(\tilde{x}, y) dl(y) + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) G(\tilde{x}, y) ds_y, \quad (6.10)$$

kde  $G(x, y)$  je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\|,$$

a kde funkce  $q_1, q_2 : \partial Y_1 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $q : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$  jsou hustoty potenciálů.

Dosazením vztahů (6.9) a (6.10) do rovnic (6.8c) a (6.8d) dostaneme následující hraniční integrální rovnice. Pro  $x \in \partial Y_1$  platí

$$\int_{\partial Y_1} q_1^{(k)}(y) G(x, y) ds_y - \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) G(x, y) ds_y - \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) G(x, y) ds_y = 0$$

Pro  $x \in \partial Y_1$  platí

$$\begin{aligned} & a_1 \left( \frac{1}{2} q_1^{(k)}(x) + \int_{\partial Y_1} q_1^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_1}}(x, y) ds_y \right) + a_2 \left( \frac{1}{2} q_2^{(k)}(x) + \right. \\ & \left. + \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}}(x, y) ds_y + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}}(x, y) ds_y \right) = (a_2 - a_1) (n_{Y_2})_k. \end{aligned}$$

Z podmínky periodicity (6.8e) pro  $\chi_2^{(k)}$  na  $\partial Y$  dostaneme rovnice

- $\forall x_1 \in (0, 1) :$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) G((x_1, 0), y) ds_y + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) G((x_1, 0), y) ds_y - \\ & - \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) G((x_1, 1), y) ds_y - \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) G((x_1, 1), y) ds_y = 0, \\ & \frac{1}{2} q^{(k)}((x_1, 0)) + \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}}((x_1, 0), y) ds_y + \\ & + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}}((x_1, 0), y) ds_y + \frac{1}{2} q^{(k)}(x_1, 1) + \\ & + \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}}((x_1, 1), y) ds_y + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}}((x_1, 1), y) ds_y = 0. \end{aligned}$$

- $\forall x_2 \in (0, 1)$  :

$$\int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) G((0, x_2), y) ds_y + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) G((0, x_2), y) ds_y - \\ - \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) G((1, x_2), y) ds_y - \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) G((1, x_2), y) ds_y = 0,$$

$$\frac{1}{2} q^{(k)}((0, x_2)) + \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}(x)}((0, x_2), y) ds_y + \\ + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}(x)}((0, x_2), y) ds_y + \frac{1}{2} q^{(k)}(1, x_2) + \\ + \int_{\partial Y_1} q_2^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}(x)}((1, x_2), y) ds_y + \int_{\partial Y} q^{(k)}(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}(x)}((1, x_2), y) ds_y = 0.$$

Zavedme následující integrální operátory:

$$[V_1 u](x) := \int_{\partial Y_1} u(y) G(x, y) ds_y, \\ [V u](x) := \int_{\partial Y} u(y) G(x, y) ds_y, \\ [K_1 u](x) := \int_{\partial Y_1} u(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}(x)}(x, y) ds_y, \\ [K u](x) := \int_{\partial Y} u(y) \frac{\partial G}{\partial n_{Y_2}(x)}(x, y) ds_y.$$

Výše uvedené hraniční integrální rovnice pak můžeme přehledně zapsat do soustavy

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_1 q_1^{(k)} \\ a_1 T_1 q_1^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 q_2^{(k)} \\ a_1 T_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} - [V q^{(k)}] = 0, & x \in \partial Y_1, \\ \begin{bmatrix} V_1 q_2^{(k)} \\ a_1 T_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} + [K q^{(k)}] = (a_2 - a_1)(n_{Y_2})_k, & x \in \partial Y_1, \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_1 q_2^{(k)} \\ V_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (x_1, 0) - \begin{bmatrix} V_1 q_2^{(k)} \\ V_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (x_1, 1) + [V q^{(k)}] (x_1, 0) - [V q^{(k)}] (x_1, 1) = 0, & x_1 \in (0, 1), \\ \begin{bmatrix} V_1 q_2^{(k)} \\ V_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (0, x_2) - \begin{bmatrix} V_1 q_2^{(k)} \\ V_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (1, x_2) + [V q^{(k)}] (0, x_2) - [V q^{(k)}] (1, x_2) = 0, & x_2 \in (0, 1), \\ \begin{bmatrix} K_1 q_2^{(k)} \\ K_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (x_1, 0) + \begin{bmatrix} K_1 q_2^{(k)} \\ K_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (x_1, 1) + [T q^{(k)}] (x_1, 0) + [T q^{(k)}] (x_1, 1) = 0, & x_1 \in (0, 1), \\ \begin{bmatrix} K_1 q_2^{(k)} \\ K_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (0, x_2) + \begin{bmatrix} K_1 q_2^{(k)} \\ K_1 q_2^{(k)} \end{bmatrix} (1, x_2) + [T q^{(k)}] (0, x_2) + [T q^{(k)}] (1, x_2) = 0, & x_2 \in (0, 1), \end{cases} \quad (6.12)$$

kde<sup>7</sup>

$$T_1 = \left( \frac{1}{2}I + K_1 \right) \text{ a } T = \left( \frac{1}{2}I + K \right).$$

### Výpočet koeficientů homogenizované matice

Z věty 5.1 vyplývá, že prvky homogenizované matice  $A^0$  jsou dány vztahem

$$a_{i,k}^0 = \int_Y \left( a_{i,k}(y) - \sum_{j=1}^2 a_{i,j}(y) \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial y_j}(y) \right) dy. \quad (6.13)$$

Předpis (6.13) můžeme upravit

$$a_{i,k}^0 = \int_Y a_{i,k}(y) dy - \int_Y a_{i,i}(y) \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial y_i}(y) dy.$$

Rozdělením druhého integrálu na integrály přes oblasti  $Y_1$  a  $Y_2$ , úpravou pomocí Greenovy věty a využitím periodicity funkce  $\chi^{(k)}$  dostaneme pro  $a_{i,i}(y) = a(y)$

$$\begin{aligned} \int_Y a(y) \frac{\partial \chi^{(k)}(y)}{\partial y_i} dy &= a_1 \int_{Y_1} \frac{\partial \chi^{(k)}(y)}{\partial y_i} dy + a_2 \int_{Y_2} \frac{\partial \chi^{(k)}(y)}{\partial y_i} dy = \\ &= a_1 \underbrace{\int_{Y_1} \left( -\frac{\partial 1}{\partial y_i} \right) \chi^{(k)}(y) dy}_{=0} + a_1 \int_{\partial Y_1} \chi^{(k)}(y) n_i ds_y + \\ &\quad + a_2 \underbrace{\int_{Y_2} \left( -\frac{\partial 1}{\partial y_i} \right) \chi^{(k)}(y) dy}_{=0} + a_2 \int_{\partial Y_2} \chi^{(k)}(y) (n_{Y_2})_i ds_y = \\ &= a_1 \int_{\partial Y_1} \chi^{(k)}(y) (n_{Y_1})_i ds_y - a_2 \int_{\partial Y_1} \chi^{(k)}(y) (n_{Y_1})_i ds_y + \\ &\quad + a_2 \underbrace{\int_{\partial Y} \chi^{(k)}(y) (n_{Y_2})_i ds_y}_{=0} = \\ &= (a_1 - a_2) \int_{\partial Y_1} \chi^{(k)}(y) (n_{Y_1})_i ds_y. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro diagonální prvky homogenizované matice  $A^0$  platí

$$a_{k,k}^0 = \int_Y a_{k,k}(y) dy - (a_1 - a_2) \int_{\partial Y_1} \chi^{(k)}(y) (n_{Y_1})_k ds_y,$$

<sup>7</sup> $I$  značí identické zobrazení.

a pro prvky mimo diagonálu

$$a_{i,k}^0 = -(a_1 - a_2) \int_{\partial Y_1} \chi^{(k)}(y) (n_{Y_1})_i \, ds_y.$$

Odtud vidíme, že k určení prvků homogenizované matice stačí znát hodnoty funkcí  $\chi^{(k)}$  na  $\partial Y_1$ . Využijeme-li vyjádření (6.9) dostaneme pro diagonální prvky

$$a_{k,k}^0 = \int_Y a_{k,k}(y) \, dy - (a_1 - a_2) \left[ \int_{\partial Y_1} \left( \int_{\partial Y_1} q_1^{(k)}(y) G(\tilde{x}, y) \, ds_y \right) (n_{Y_1})_k \, ds_y \right], \quad (6.14)$$

respektive

$$a_{i,k}^0 = -(a_1 - a_2)_{i,k} \left[ \int_{\partial Y_1} \left( \int_{\partial Y_1} q_1^{(k)}(y) G(\tilde{x}, y) \, ds_y \right) (n_{Y_1})_i \, ds_y \right] \quad (6.15)$$

pro prvky mimo diagonálu.

Uvažujme diskretizaci hranic  $\partial Y_1$  a  $\partial Y$  do disjunktních otevřených úseček tak, aby

$$\bigcup_{\ell=1}^{m_1} \overline{S_1^\ell} = \partial Y_1 \text{ a } \bigcup_{\ell=1}^{m_2} \overline{S_2^\ell} = \partial Y.$$

Uvažujme po úsečkách konstantní funkce  $\psi_1^i$  a  $\psi_2^i$  takové, že

$$\psi_1^i(y) \big|_{S_1^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_1 \text{ a } \psi_2^i(y) \big|_{S_2^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_2.$$

Hledejme neznámé funkce  $q_1^{(k)}$ ,  $q_2^{(k)}$  a  $q^{(k)}$  lineární kombinace báze funkcí  $\psi_1^i$  a  $\psi_2^i$ :

$$q_1^{(k)}(y) = \sum_{\ell=1}^{m_1} q_{1,\ell}^{(k)} \psi_1^i(y), \quad q_2^{(k)}(y) = \sum_{\ell=1}^{m_2} q_{2,\ell}^{(k)} \psi_2^i(y), \quad q^{(k)}(y) = \sum_{\ell=1}^{m_2} q_\ell^{(k)} \psi_1^i(y),$$

přičemž hledané vektory koeficientů označíme

$$\mathbf{q}_1^{(k)} := (q_{1,1}^{(k)}, \dots, q_{1,m_1}^{(k)}), \quad \mathbf{q}_2^{(k)} := (q_{2,1}^{(k)}, \dots, q_{2,m_2}^{(k)}), \quad \mathbf{q}^{(k)} := (q_1^{(k)}, \dots, q_{m_2}^{(k)}).$$

Kolokační verze metody hraničních prvků spočívá v řešení soustavy (6.11) a (6.12) pouze ve středových bodech úseček, které označíme  $x_1^\ell \in S_1^\ell$  a  $x^\ell \in S_2^\ell$ . To vede na soustavu



$2m_1 + m_2$  lineárních rovnic o stejném počtu neznámých

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,1} & -\mathbf{V}_{1,1} & -\mathbf{V}_{1,2} \\ a_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{I}_1 + \mathbf{K}_{1,1} \right) & a_2 \left( \frac{1}{2} \mathbf{I}_1 - \mathbf{K}_{1,1} \right) & -a_2 \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{P} \mathbf{V}_{2,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{P} \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^{(k)} \\ \mathbf{q}_2^{(k)} \\ \mathbf{q}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{n}^{(k)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

kde:

- $\mathbf{I}_1$  je matice identity  $m_1 \times m_1$ ,  $\mathbf{I}$  je matice identity  $m \times m$ .
- Pro  $s, t \in \{0, 1\}$  definujeme matice  $\mathbf{V}_{s,t}, \mathbf{K}_{s,t} \in \mathbb{R}^{m_s \times m_t}$ :

$$(\mathbf{V}_{s,t})_{i,j} := \int_{S_t^j} G(x_t^i, y) \, ds_y,$$

$$(\mathbf{K}_{s,t})_{i,j} := \int_{S_t^j} \nabla_x G(x_s^i, y) \cdot n_s^i \, ds_y,$$

přičemž  $n_1^i$  a  $n_2^i$  značí jednotkovou normálu k  $S_1^i$  a  $S_2^i$  směřující ven z  $Y_1$  resp.  $Y$ .

- Vektor  $\mathbf{n}^{(k)} \in \mathbb{R}^{m_1}$  definujeme předpisem

$$(\mathbf{n}^{(k)})_i = a_1 (n_1^i)_k - a_2 (n_2^i)_k,$$

přičemž  $(n_1^i)_k$  a  $(n_2^i)_k$  značí  $k$ -tou složku jednotkové normály k  $S_1^i$  a  $S_2^i$  směřující ven z  $Y_1$  resp.  $Y$ .

- $\mathbf{P}$  je permutační matice  $\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}$

$$(\mathbf{P}_1)_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j \wedge 1 \leq i \leq \frac{m}{4}, \\ 1, & j = \frac{3}{4}m + 1 - i \wedge 1 \leq i \leq \frac{m}{4}, \\ 1, & j = \frac{5}{4}m + 1 - i \wedge \frac{m}{4} < i \leq \frac{m}{2}, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Řešením (6.16) dostaneme vektor  $\mathbf{q}_1^{(k)}$ , pomocí kterého pro po částech konstantní funkci  $a$  na oblasti  $Y_1$  resp.  $Y - Y_1$  snadno určíme koeficienty homogenizované matice  $A_0$  podle

vztahů (6.14) a (6.15)

$$a_{k,k}^0 = a_1 |Y_1| + a_2 |Y - Y_1| - (a_1 - a_2) \left( \mathbf{n}^{(k)} \right)^T \mathbf{V}_{1,1} \left( \mathbf{q}_1^{(k)} \cdot \mathbf{l} \right), \quad k = 1, 2,$$

$$a_{i,k}^0 = - (a_1 - a_2) \left( \mathbf{n}^{(i)} \right)^T \mathbf{V}_{1,1} \left( \mathbf{q}_1^{(k)} \cdot \mathbf{l} \right), \quad i, k = 1, 2, i \neq k,$$

kde  $|Y_1|$  resp.  $|Y - Y_1|$  je obsah oblasti  $Y_1$  resp.  $Y - Y_1$  a vektor  $\mathbf{l}$  definujeme

$$\mathbf{l}_i := \|S_1^i\|.$$

## 7 Numerické experimenty

V této části ukážeme numerická řešení příkladů z částí 2 a 3. Dále pak uvedeme srovnání výpočtu homogenizované matice pomocí MKP a MHP. U každé úlohy je uvedena použitá hustota diskretizace pro výpočet chyby, která je uvedena v tabulce.

Nechť  $X_n \subset \Omega$  je množina diskretizačních uzlů  $x_i$  pro MKP resp. MHP. Pro porovnávání funkcí  $u_\varepsilon$  a  $u_0$  na oblasti  $\Omega$  definujeme normy  $\text{err}_s$  a  $\text{err}_r$ :

$$\text{err}_s := \sup_{x_i} |u_\varepsilon(x_i) - u_0(x_i)|$$

$$\text{err}_r := \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (u_\varepsilon(x_i) - u_0(x_i))^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (u_0(x_i))^2}}.$$

Na obrázcích je z důvodu přehlednosti síť upravena. Pro vizuální porovnání charakteru chyby je definována funkce

$$\text{err}_\varepsilon(x_i) := u_\varepsilon(x_i) - u_0(x_i).$$

Rovněž obrázky této funkce chyby jsou pouze orientační s méně hustou diskretizační sítí.

### 7.1 Homogenizace v 1D

U následujících příkladů uvažujeme  $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$ .

**Příklad 7.1.** Uvažujme zadání z příkladů 2.7 a 2.8. Porovnejme pro

$$\varepsilon \in \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{1000} \right\}$$

jednotlivá řešení  $u_\varepsilon$  s řešeními  $u_0$ . Na obrázku 7.1 (resp. (7.2)) jsou pro zadaná  $\varepsilon \leq \frac{1}{100}$  vykreslena řešení  $u_\varepsilon$  pomocí MKP a analyticky vypočtená řešení homogenizované úlohy  $u_0$ , viz (2.10) (resp. (2.11)). Pro názornost jsou vykresleny i odpovídající funkce  $a_\varepsilon$  (červeně). V tabulce 1 vidíme, že se chyby řešení s  $\varepsilon \rightarrow 0$  zmenšují. Výpočet byl proveden s diskretizací na  $n = 10^5$  uzlů.

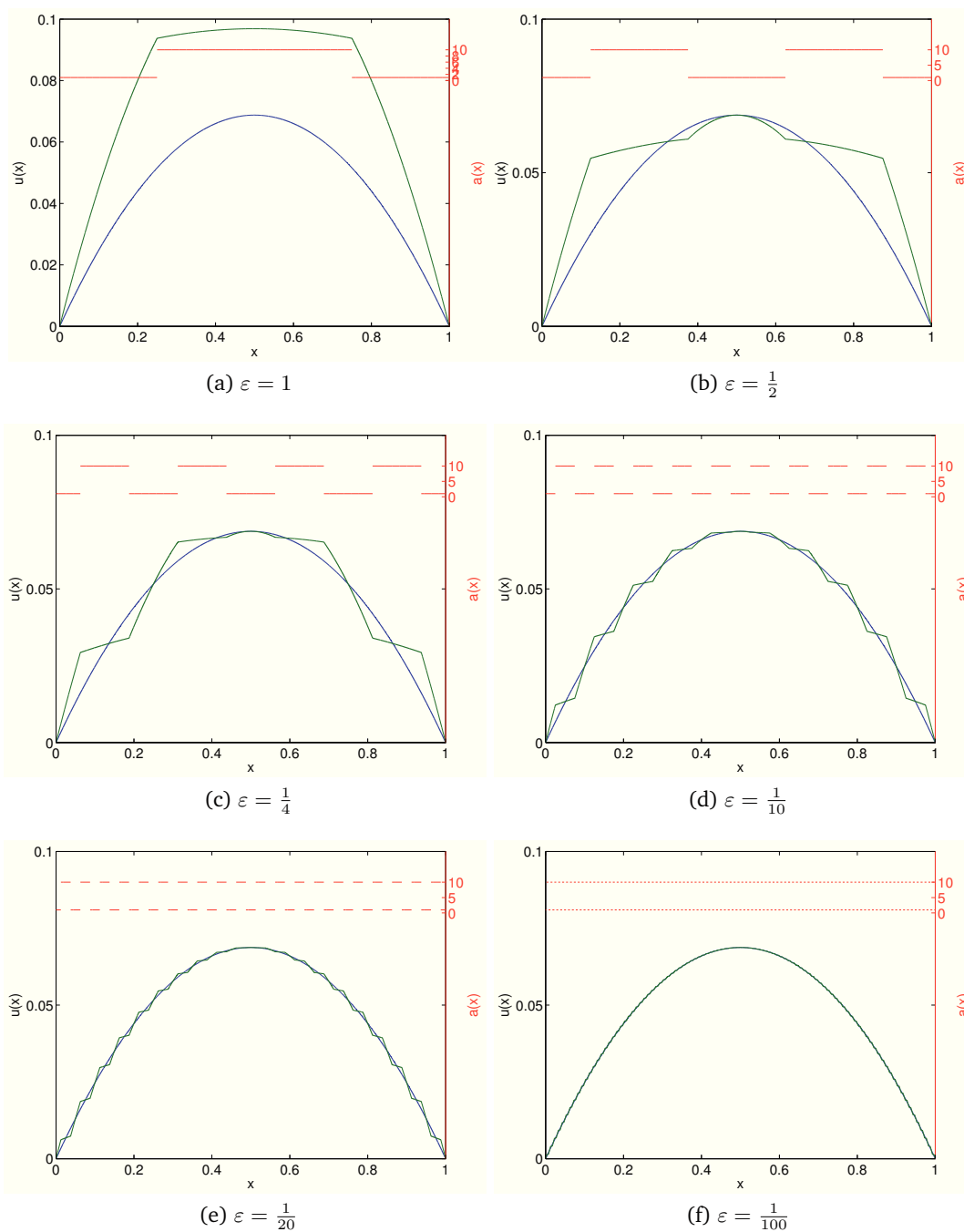
$\varepsilon$	$\text{err}_s$	$\text{err}_r$
1	$4,22 \cdot 10^{-2}$	$5,96 \cdot 10^{-1}$
0,5	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$2,19 \cdot 10^{-1}$
0,25	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$9,78 \cdot 10^{-2}$
0,1	$5,56 \cdot 10^{-3}$	$3,76 \cdot 10^{-2}$
0,05	$2,81 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-2}$
0,01	$5,61 \cdot 10^{-4}$	$3,75 \cdot 10^{-3}$
0,005	$2,81 \cdot 10^{-4}$	$1,91 \cdot 10^{-3}$
0,001	$5,62 \cdot 10^{-5}$	$3,73 \cdot 10^{-4}$

(a) Příklad 2.8.

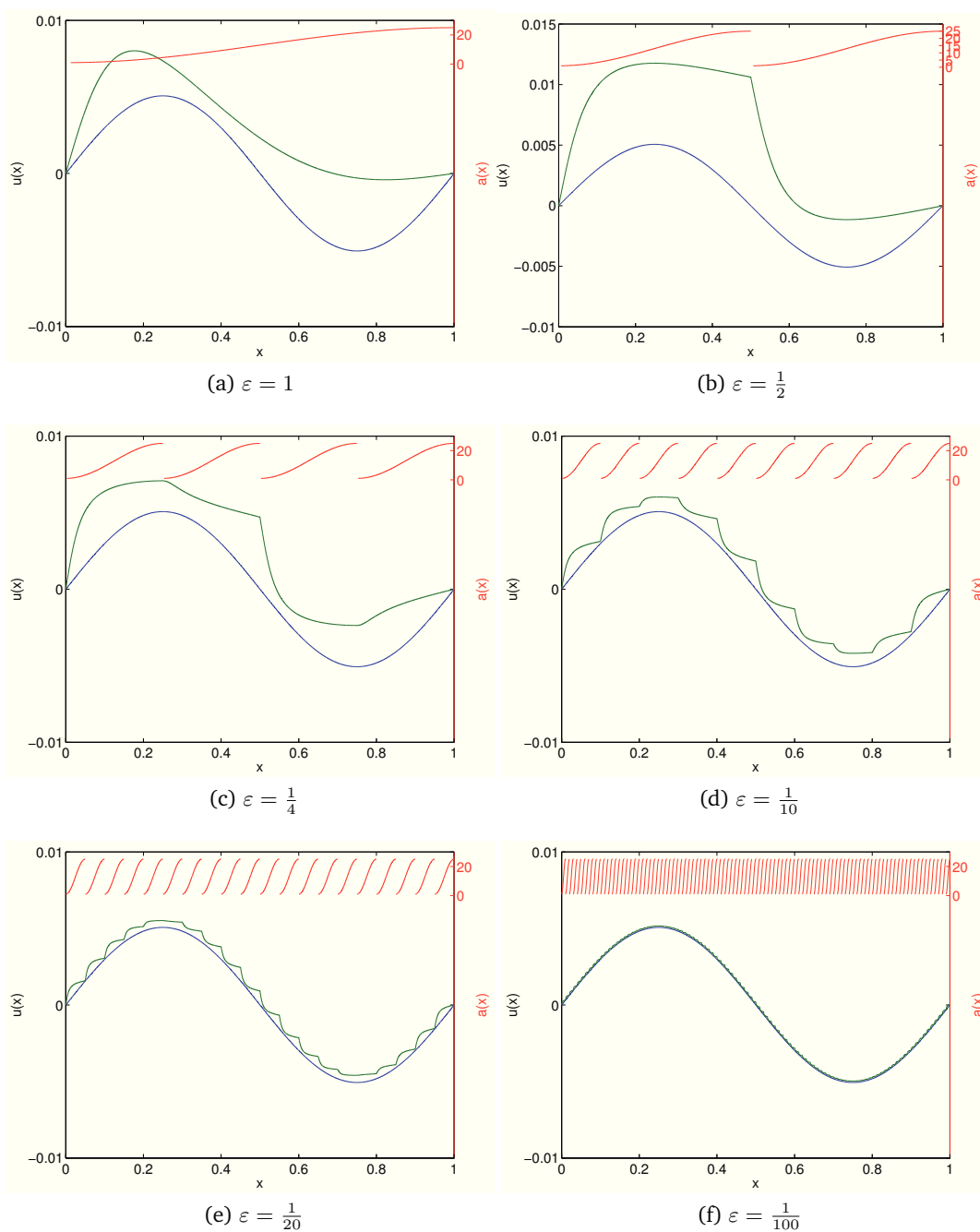
$\varepsilon$	$\text{err}_s$	$\text{err}_r$
1	$4,81 \cdot 10^{-3}$	$8,71 \cdot 10^{-1}$
0,5	$1,06 \cdot 10^{-2}$	1,63
0,25	$4,73 \cdot 10^{-3}$	$7,02 \cdot 10^{-1}$
0,1	$1,81 \cdot 10^{-3}$	$2,72 \cdot 10^{-1}$
0,05	$9,13 \cdot 10^{-4}$	$1,35 \cdot 10^{-1}$
0,01	$1,82 \cdot 10^{-4}$	$2,70 \cdot 10^{-2}$
0,005	$9,11 \cdot 10^{-5}$	$1,35 \cdot 10^{-2}$
0,001	$1,82 \cdot 10^{-5}$	$2,71 \cdot 10^{-3}$

(b) Příklad 2.8.

Tabulka 1: Chyba řešení  $\text{err}_s$  a  $\text{err}_r$  pro úlohy v 1D.



Obrázek 7.1: Příklad 2.7: srovnání řešení  $u_\varepsilon$  (zeleně) a  $u_0$  (modře).



Obrázek 7.2: Příklad 2.8: srovnání řešení  $u_\varepsilon$  (zeleně) a  $u_0$  (modře).

## 7.2 Homogenizace ve 2D

U následujících tří příkladů uvažujeme  $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ .

**Příklad 7.2.** Uvažujme úlohu z příkladu 3.3 a porovnejme pro  $\varepsilon \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\}$  jednotlivá řešení  $u_\varepsilon$  s řešením  $u_0$  získaným pomocí věty 5.1. Funkce  $f$  nechť je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle \times \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 20x_1x_2 \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2), & \text{jinde,} \end{cases}$$

viz obrázek 7.3a.

Pro homogenizaci byla použita metoda konečných prvků s diskretizační sítí o 40000 uzlech. Řešením rovnice (5.4) jsou funkce  $\chi_1$  a  $\chi_2$  viz obrázek 7.4. Získaná homogenizovaná matice je

$$A^0 \doteq \begin{pmatrix} 1,9354 & 0 \\ 0 & 1,9354 \end{pmatrix}.$$

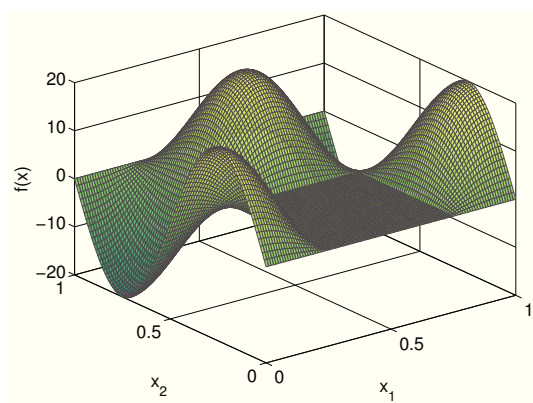
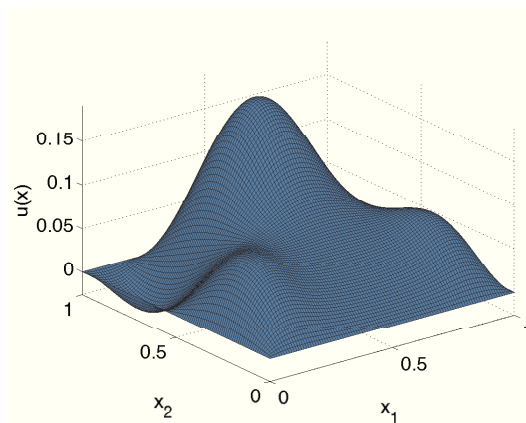
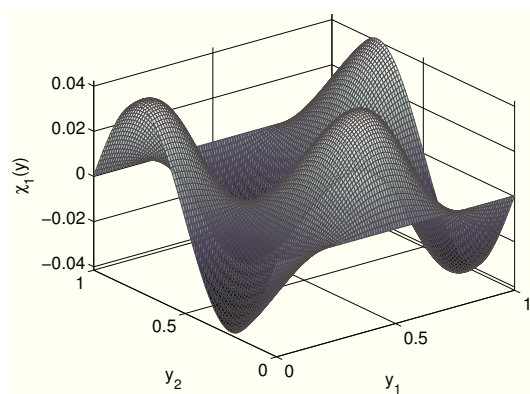
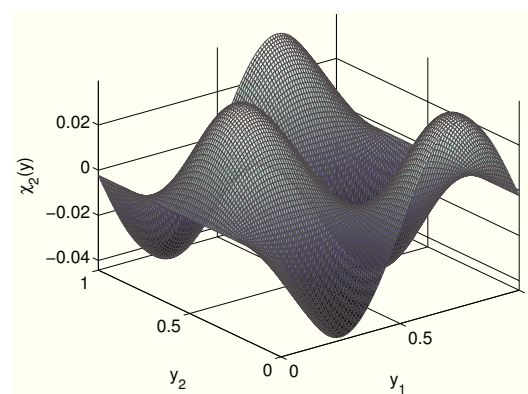
Pokud s touto maticí řešíme úlohu

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u_0) = f & \text{v } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

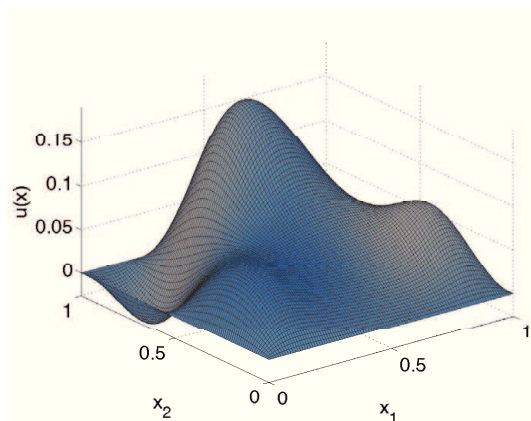
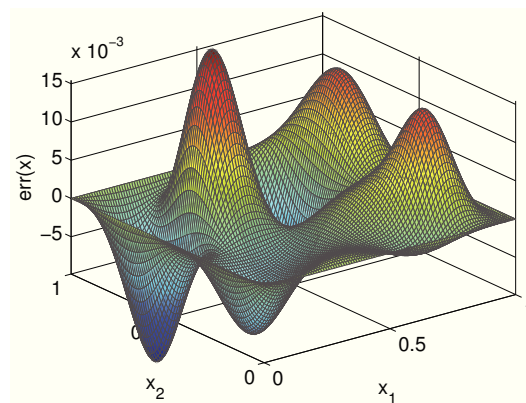
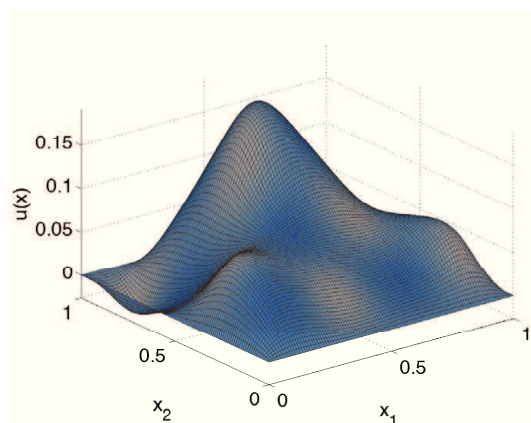
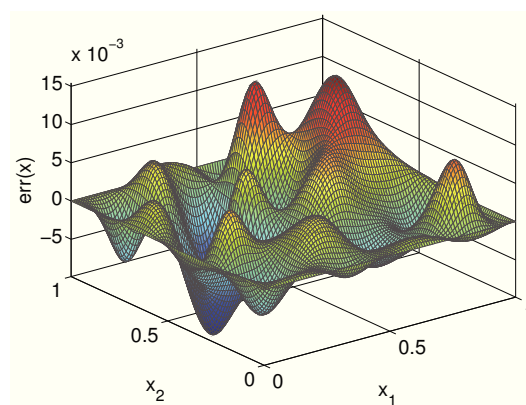
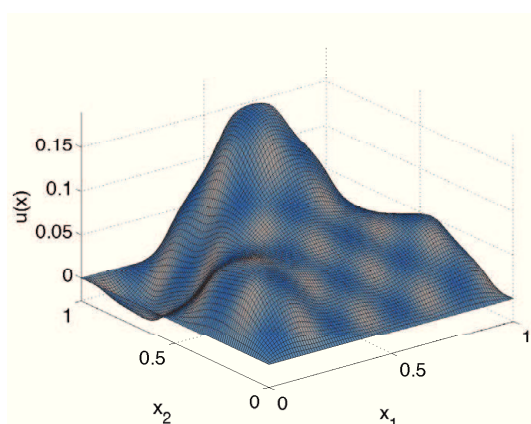
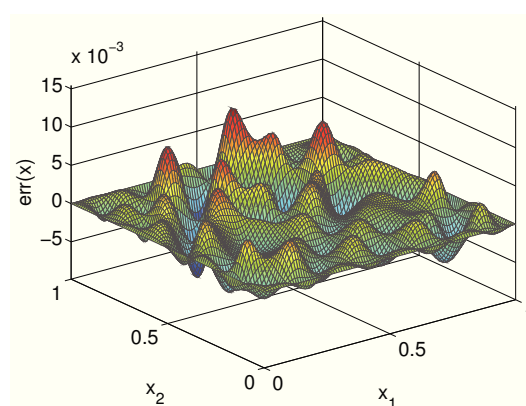
dostaneme funkci  $u_0$  znázorněné na obrázku 7.3b. Srovnání řešení  $u_0$  a  $u_\varepsilon$  pro jednotlivá  $\varepsilon$  je uvedeno v tabulce 2 a na obr. 7.5 a 7.6. Pro řešení  $u_\varepsilon$  byla použita diskretizační síť o 90000 uzlech.

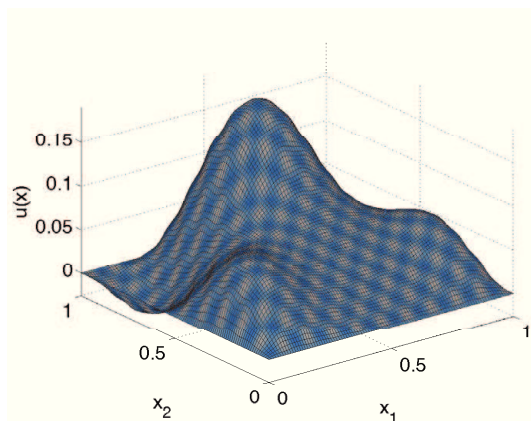
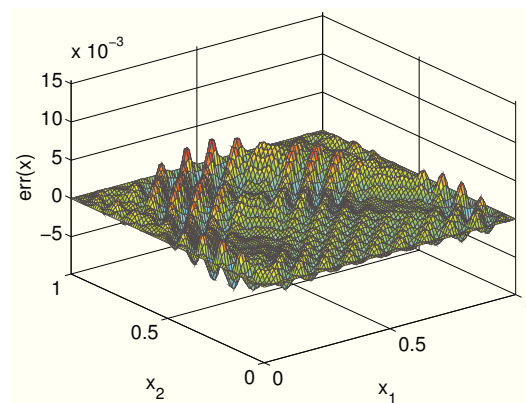
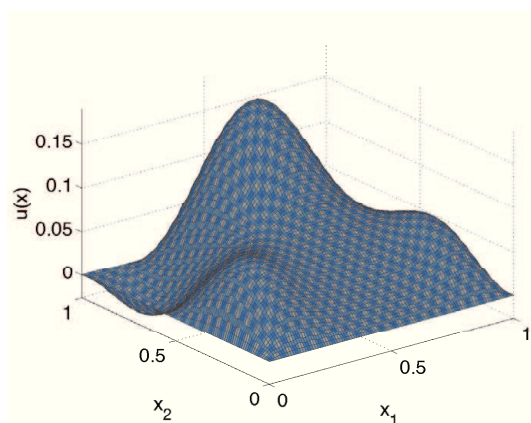
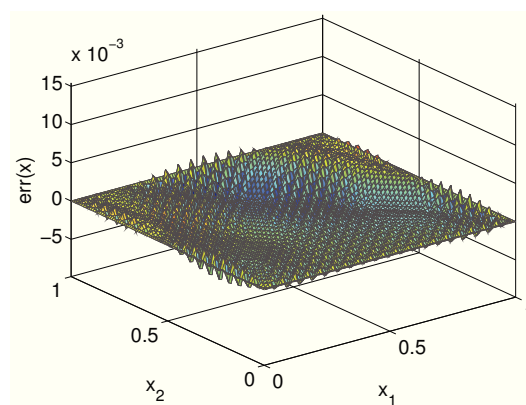
$\varepsilon$	$\operatorname{err}_s$	$\operatorname{err}_r$
1	$1,97 \cdot 10^{-2}$	$8,24 \cdot 10^{-2}$
0,5	$1,54 \cdot 10^{-2}$	$5,84 \cdot 10^{-2}$
0,25	$9,62 \cdot 10^{-3}$	$3,00 \cdot 10^{-2}$
0,1	$4,80 \cdot 10^{-3}$	$1,24 \cdot 10^{-2}$
0,05	$2,51 \cdot 10^{-4}$	$6,44 \cdot 10^{-3}$

Tabulka 2: Příklad 7.2: chyba řešení  $\operatorname{err}_s$  a  $\operatorname{err}_r$ .

(a) Funkce  $f$ .(b) Řešení  $u_0$ .Obrázek 7.3: Příklad 7.2: Funkce  $f$  a řešení  $u_0$ .(a)  $\chi_1$ (b)  $\chi_2$ Obrázek 7.4: Příklad 7.2: funkce  $\chi$ .



(a)  $\varepsilon = 1$ (b)  $\varepsilon = 1$ (c)  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (d)  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (e)  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (f)  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ Obrázek 7.5: Příklad 7.2: řešení  $u_\varepsilon$  a chyba  $\text{err}_\varepsilon$ .

(a)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (b)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (c)  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ (d)  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ Obrázek 7.6: Příklad 7.2: řešení  $u_\varepsilon$  a chyba  $\text{err}_\varepsilon$ .

**Příklad 7.3.** Uvažujme zadání z příkladu 3.4 s funkcí  $f \equiv 1$  a maticovou funkcí  $A$  danou předpisem

$$A(y) = \begin{pmatrix} a(y_1) & 0 \\ 0 & a(y_1) \end{pmatrix}, \text{ kde } a(y_1) = 13 - 12 \cos(2\pi y_1),$$

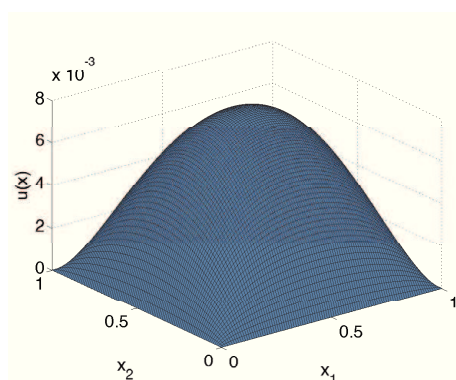
viz obr. 3.1b. Porovnejme pro  $\varepsilon \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\}$  jednotlivá řešení  $u_\varepsilon$  s řešením  $u_0$  získaným pomocí věty 5.1. V příkladu 3.4 jsme podle (3.13) analyticky určili homogenizovanou matici (3.14)

$$A^0 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

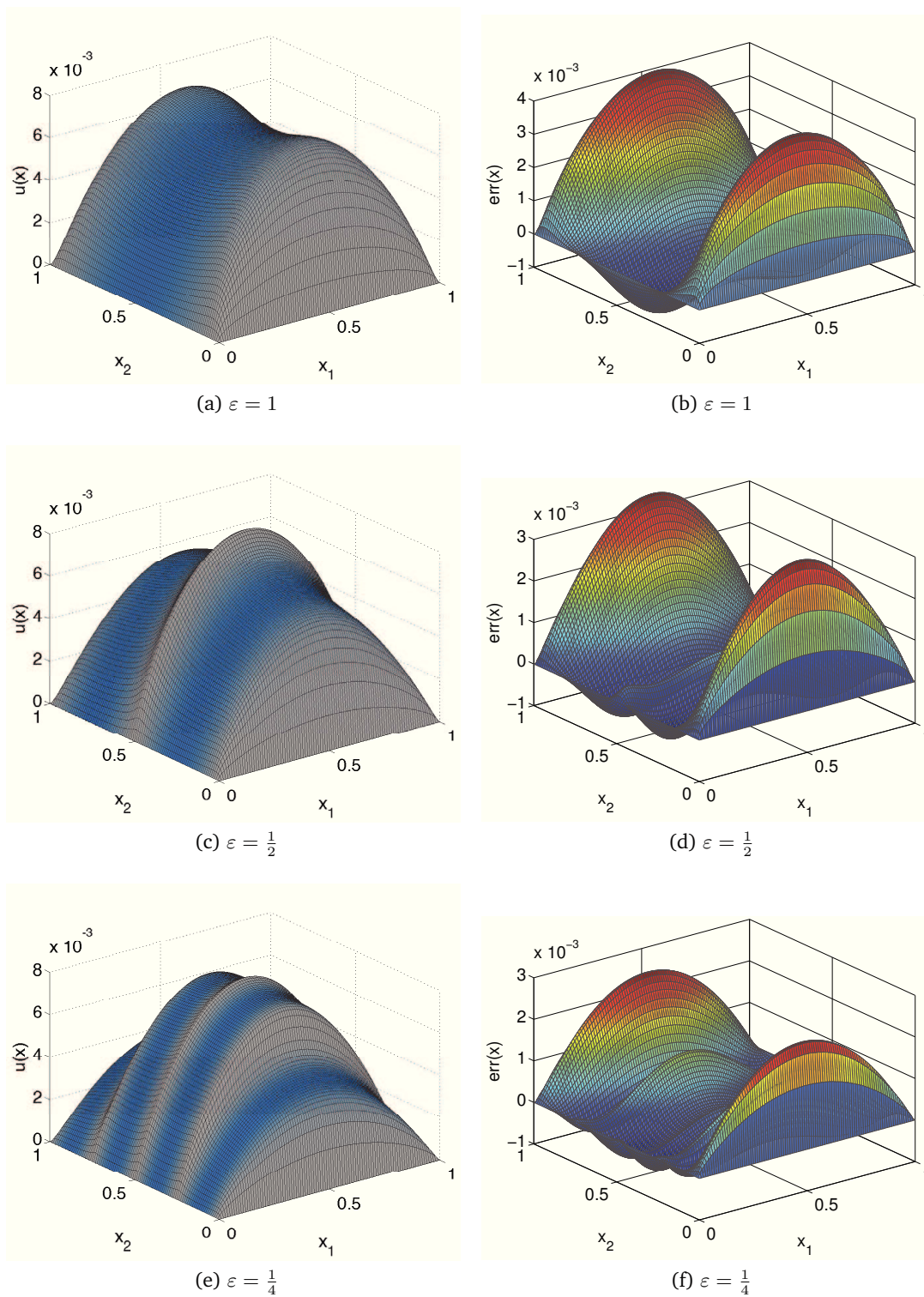
Řešením homogenizované úlohy dostaneme funkci  $u_0$  znázorněnou na obrázku 7.7. Srovnání řešení  $u_0$  a  $u_\varepsilon$  pro jednotlivá  $\varepsilon$  je uvedeno v tabulce 3 a na obrázku 7.8 a 7.9. Pro řešení  $u_\varepsilon$  byla použita diskretizační síť o 90000 uzlech.

$\varepsilon$	$\text{err}_s$	$\text{err}_r$
1	$4,21 \cdot 10^{-3}$	$3,77 \cdot 10^{-1}$
0,5	$3,51 \cdot 10^{-3}$	$2,67 \cdot 10^{-1}$
0,25	$2,52 \cdot 10^{-3}$	$1,69 \cdot 10^{-1}$
0,1	$1,31 \cdot 10^{-3}$	$9,82 \cdot 10^{-2}$
0,05	$9,73 \cdot 10^{-4}$	$8,37 \cdot 10^{-2}$

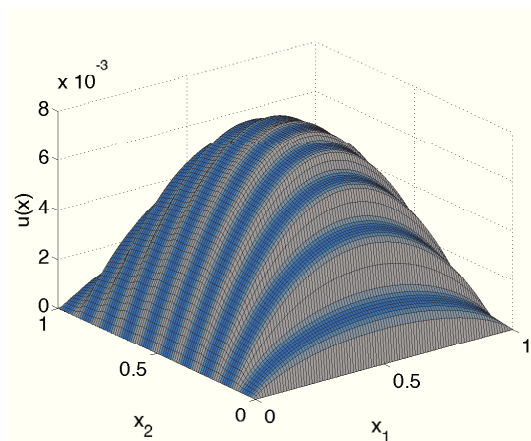
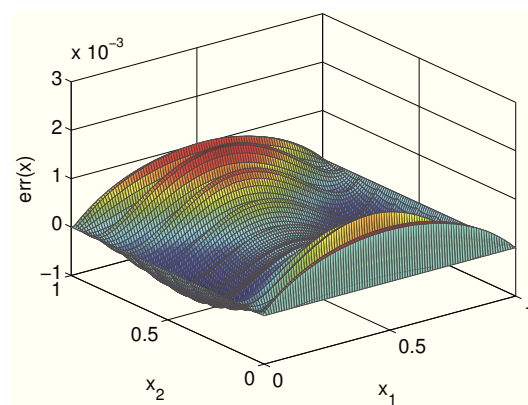
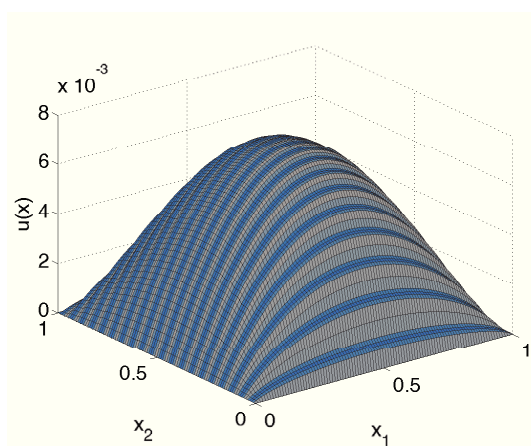
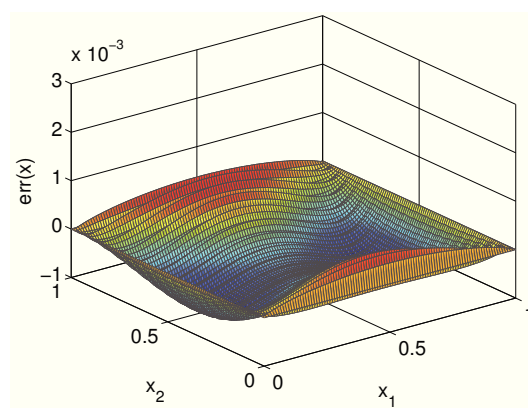
Tabulka 3: Příklad 7.3: chyba řešení  $\text{err}_s$  a  $\text{err}_r$ .



Obrázek 7.7: Příklad 7.3: řešení  $u_0$ .



Obrázek 7.8: Příklad 7.3: řešení  $u_\varepsilon$  a chyba  $\text{err}_\varepsilon$ .

(a)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (b)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (c)  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ (d)  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ Obrázek 7.9: Příklad 7.3: řešení  $u_\varepsilon$  a chyba  $\text{err}_\varepsilon$ .



**Příklad 7.4.** Uvažujme příklad kompozitního materiálu popsáno v podkapitole 6.2 (viz obrázek 6.1) s koeficienty  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 10$ . Porovnejme pro  $\varepsilon \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\}$  jednotlivá řešení  $u_\varepsilon$  s řešením  $u_{0-K}$  získaným pomocí MKP a  $u_{0-H}$  získaným pomocí MHP. Funkci  $f$  uvažujme konstantní, rovnu 1.

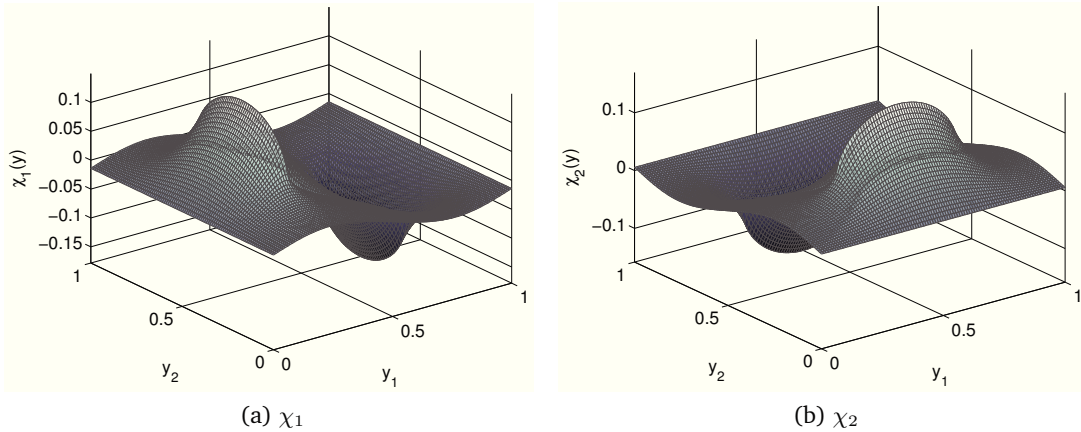
Homogenizované matice jsou

$$A_K^0 = \begin{pmatrix} 6,4771 & 0 \\ 0 & 6,4771 \end{pmatrix} \text{ a } A_H^0 = \begin{pmatrix} 6,4782 & 0 \\ 0 & 6,4782 \end{pmatrix}.$$

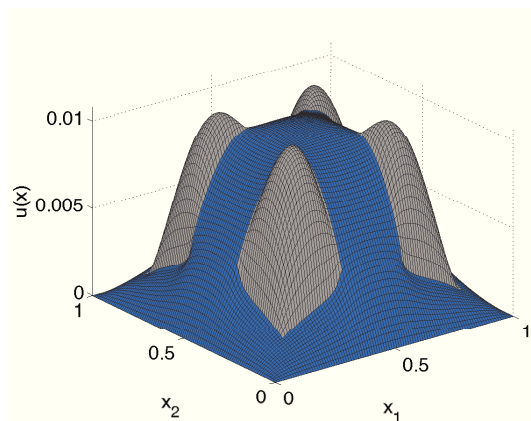
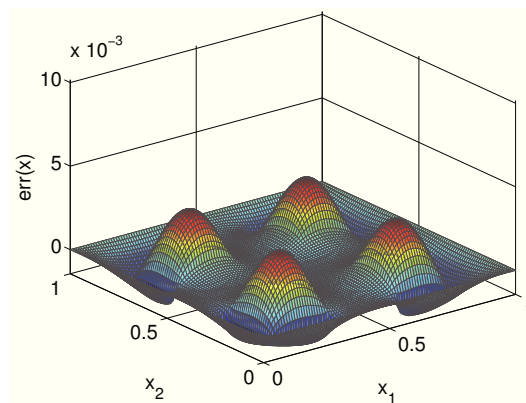
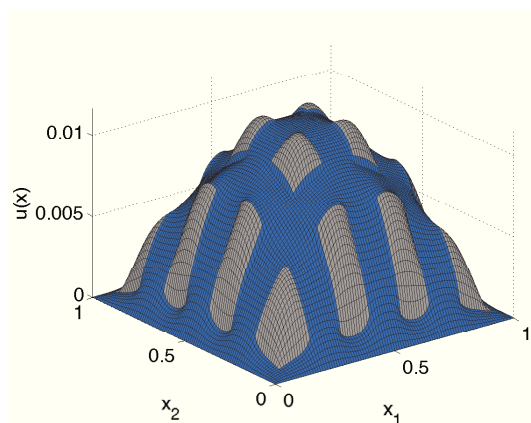
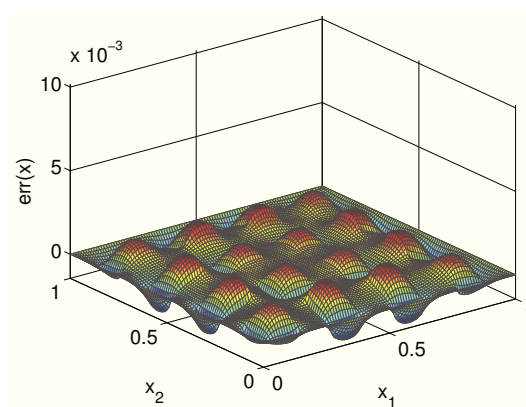
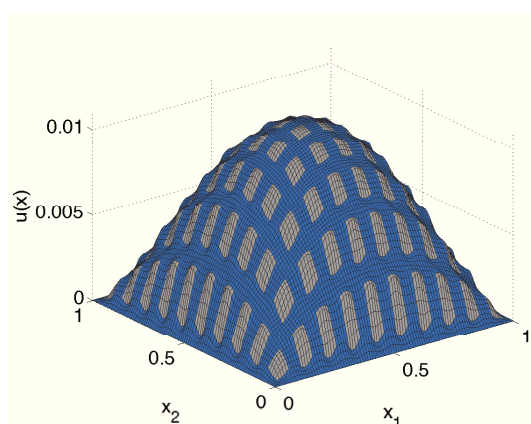
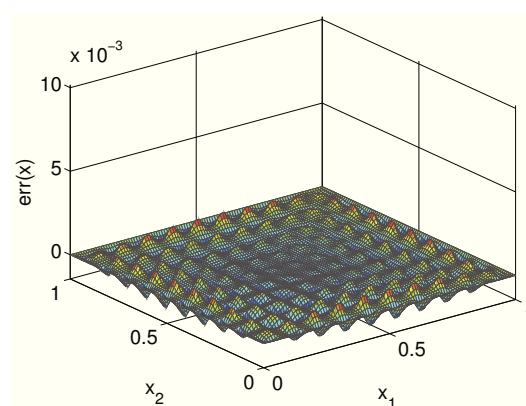
Na obrázku 7.11 je pro vybraná  $\varepsilon$  srovnání řešení  $u_\varepsilon$  a řešení homogenizované úlohy  $u_{0-H}$  včetně znázornění chyby  $\text{err}_\varepsilon$ . V tabulce 4 je uvedeno srovnání chyb mezi  $u_{0-K}$  a  $u_{0-H}$ . K výpočtu homogenizované úlohy byla použita diskretizační síť o 160000 uzlech. Ukazuje se, že výpočet koeficientů pomocí MHP a MKP dává prakticky stejné výsledky.

$\varepsilon$	$\text{err}_{s-K}$	$\text{err}_{s-H}$	$\text{err}_{r-K}$	$\text{err}_{r-H}$
1	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$5,54 \cdot 10^{-1}$	$5,54 \cdot 10^{-1}$
0,5	$2,92 \cdot 10^{-3}$	$2,92 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-1}$	$1,62 \cdot 10^{-1}$
0,25	$1,68 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-3}$	$6,93 \cdot 10^{-2}$	$6,92 \cdot 10^{-2}$
0,1	$8,10 \cdot 10^{-4}$	$8,10 \cdot 10^{-4}$	$2,87 \cdot 10^{-2}$	$2,86 \cdot 10^{-2}$
0,05	$4,08 \cdot 10^{-4}$	$4,08 \cdot 10^{-4}$	$1,41 \cdot 10^{-2}$	$1,40 \cdot 10^{-2}$

Tabulka 4: Příklad 7.4: chyba řešení  $\text{err}_{s-K}$ ,  $\text{err}_{s-H}$ ,  $\text{err}_{r-K}$  a  $\text{err}_{r-H}$ .



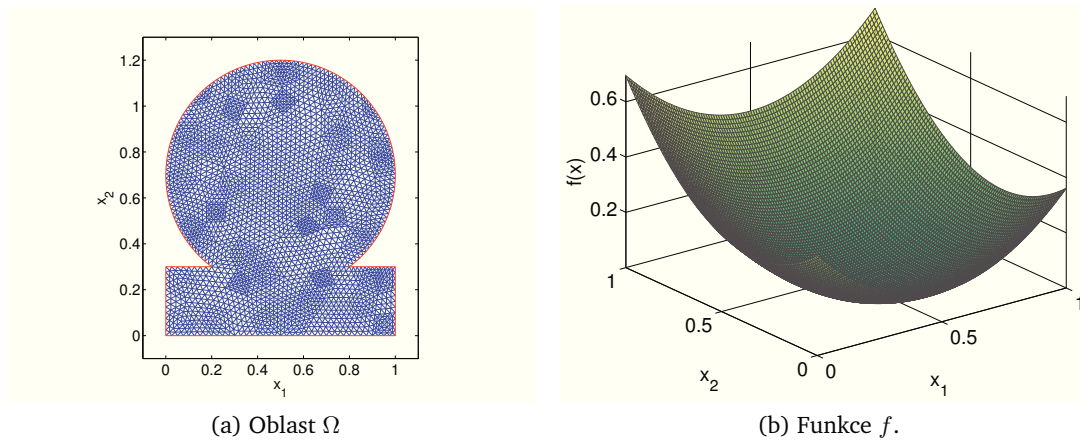
Obrázek 7.10: Příklad 7.4: funkce  $\chi$ .

(a)  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (b)  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (c)  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (d)  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ (e)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (f)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ Obrázek 7.11: Příklad 7.4: řešení  $u_\varepsilon$  a chyba  $\text{err}_\varepsilon$ .

**Příklad 7.5.** Uvažujme stejnou úlohu jako v předchozím příkladu, ale tentokrát na oblasti  $\Omega$  definované jako průnik kruhu o středu v  $[0,5; 0,7]$  s poloměrem 0,5 a obdélníku definovaného body  $[0; 0]$ ,  $[1; 0]$ ,  $[1; 0,3]$ ,  $[0; 0,3]$ , viz obrázek 7.12a. Dále uvažujme funkci  $f$  definovanou předpisem

$$f(x, y) := \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2,$$

viz obrázek 7.12b. Využijme homogenizovanou matici z předchozího příkladu a porovnejme pro  $\varepsilon \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}\right\}$  jednotlivá řešení  $u_\varepsilon$  s řešením  $u_0$ .



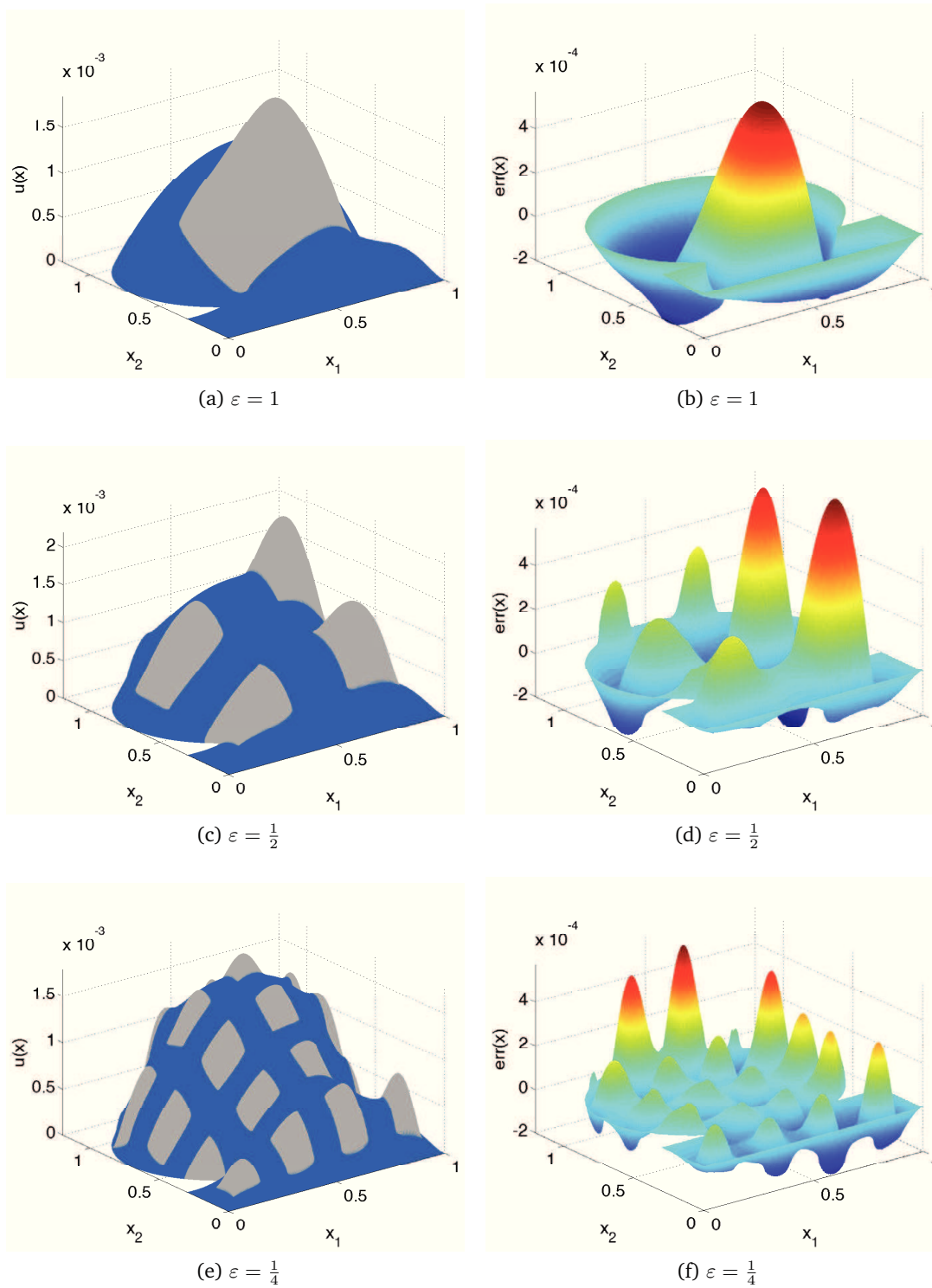
Obrázek 7.12: Příklad 7.5: zadání  $\Omega$  a  $f$ .

Srovnání řešení  $u_0$  a  $u_\varepsilon$  pro jednotlivá  $\varepsilon$  je uvedeno v tabulce 5 a na obrázku 7.8 a 7.9. Pro řešení  $u_\varepsilon$  byla použita diskretizační síť o  $2,87 \cdot 10^6$  uzlů.

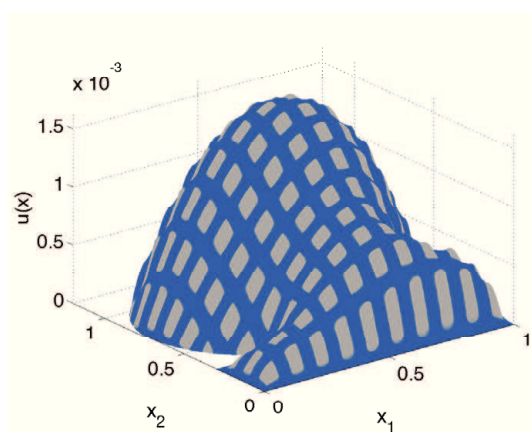
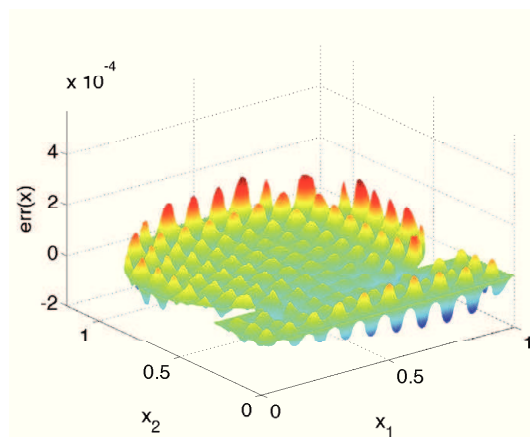
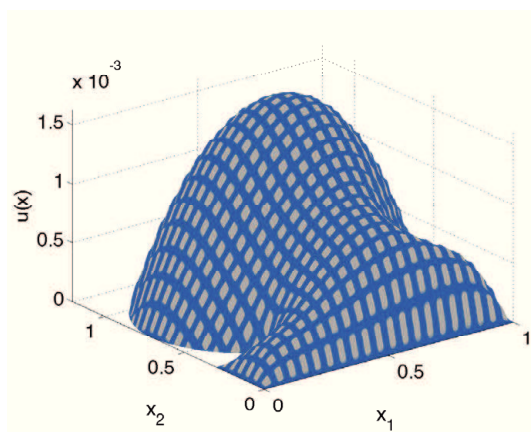
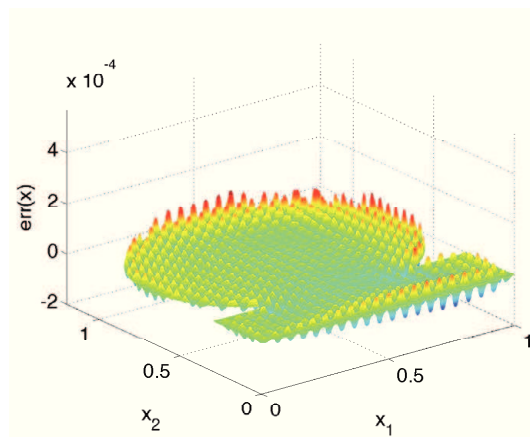
$\varepsilon$	$\text{err}_s$	$\text{err}_r$
1	$5,76 \cdot 10^{-4}$	$2,87 \cdot 10^{-1}$
0,5	$7,84 \cdot 10^{-4}$	$2,07 \cdot 10^{-1}$
0,25	$5,20 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-1}$
0,1	$1,61 \cdot 10^{-4}$	$3,50 \cdot 10^{-2}$
0,05	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$1,73 \cdot 10^{-2}$
0,01	$4,70 \cdot 10^{-5}$	$7,74 \cdot 10^{-3}$

Tabulka 5: Příklad 7.5: chyba řešení  $\text{err}_s$  a  $\text{err}_r$ .



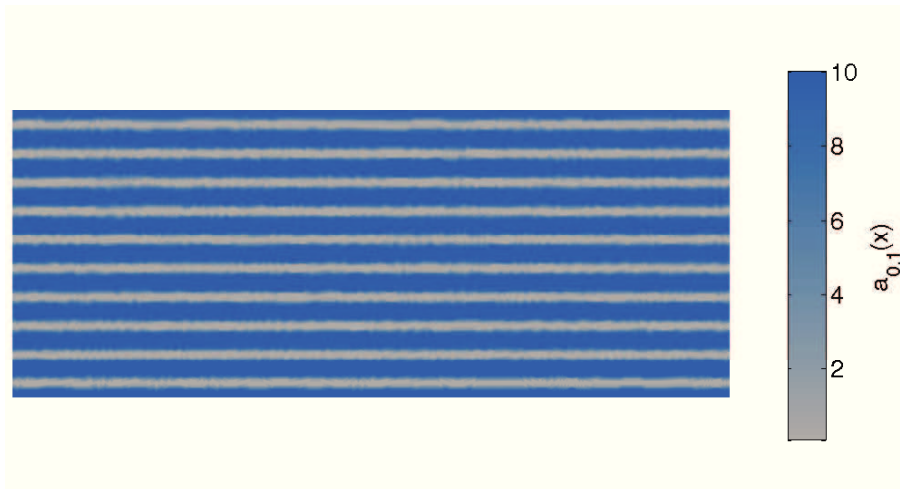


Obrázek 7.13: Příklad 7.5: řešení  $u_\varepsilon$  a chyba  $\text{err}_\varepsilon$ .

(a)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (b)  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (c)  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ (d)  $\varepsilon = \frac{1}{20}$ Obrázek 7.14: Příklad 7.5: řešení  $u_\varepsilon$  a chyba  $\text{err}_\varepsilon$ .

### 7.3 Vedení tepla ve 2D

V části 5 jsme dokázali homogenizační teorém pro Dirichletovu úlohu s nulovou okrajovou podmínkou na celé hranici  $\Omega$ . Při odvození homogenizovaných koeficientů matice  $A^0$  však okrajové podmínky úlohy v makroskopickém měřítku nehrají roli. Podívejme se nyní na konkrétní úlohu stacionárního rozložení teplotního pole v sendvičovém materiálu jako například na obrázku 7.15.



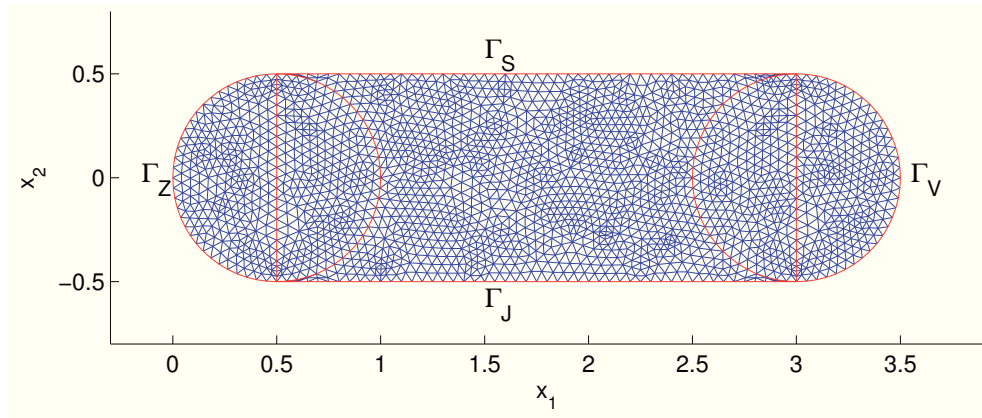
Obrázek 7.15: Příklad kompozitního materiálu.

**Příklad 7.6.** Nechť  $\Omega$  je oblast viz obrázek 7.16 a funkce  $A$  je definovaná jako periodické prodloužení funkce  $A_z : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definované předpisem

$$A_z(y) := \begin{pmatrix} a_z(y_2) & 0 \\ 0 & a_z(y_2) \end{pmatrix}, \text{ kde } a_z(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & y_2 \in \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle, \\ 10, & y_2 \in \langle 0, 1 \rangle \setminus \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle. \end{cases}$$

Řešme pro  $\varepsilon \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}\}$  úlohu

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon(x) \right) = 0, & x \in \Omega, \\ u_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} - (x_2)^2, & x \in \Gamma_Z, \\ u_\varepsilon(x) = 0, & x \in \Gamma_V, \\ \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial n} = -\frac{1}{2}, & x \in \Gamma_S \cup \Gamma_J, \end{cases}$$

Obrázek 7.16: Příklad 7.6: Oblast  $\Omega$ .

a porovnejme jednotlivá řešení  $u_\varepsilon$  s řešením  $u_0$  homogenizované úlohy

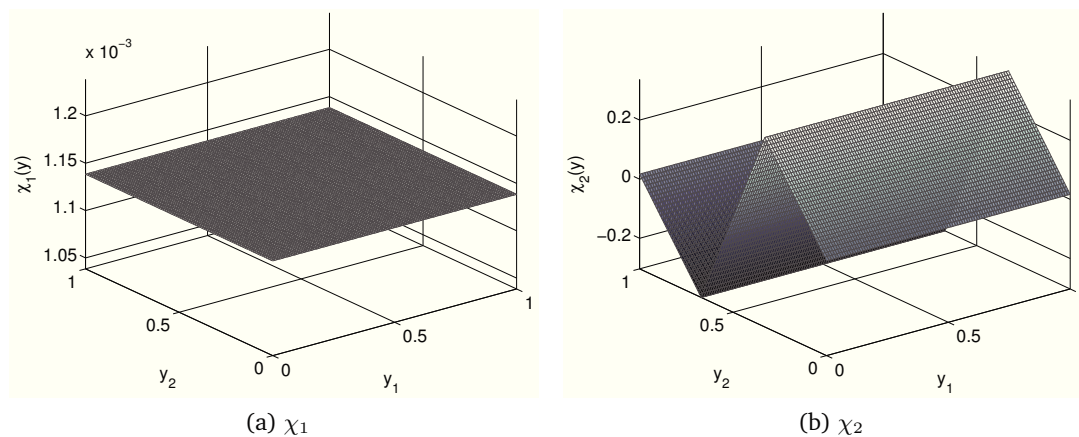
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0(x) \nabla u_0(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ u_0(x) = \frac{1}{2} - (x_2)^2, & x \in \Gamma_Z, \\ u_0(x) = 0, & x \in \Gamma_V, \\ \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = -\frac{1}{2}, & x \in \Gamma_S \cup \Gamma_J, \end{cases}$$

kde  $A^0$  je matice získaná pomocí věty 5.1.

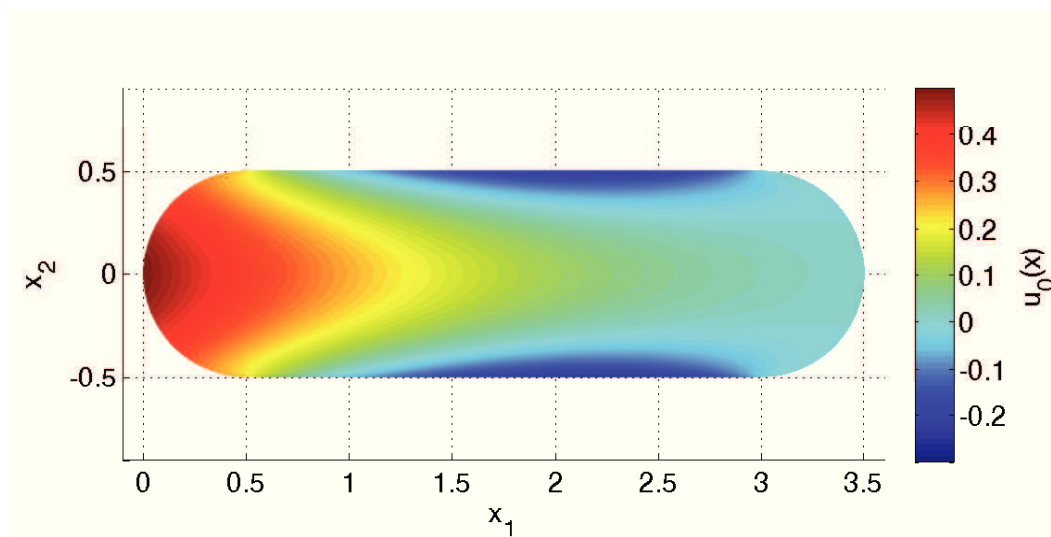
Řešením úlohy (5.4) dostaneme funkce  $\chi_1$  a  $\chi_2$  znázorněné na obrázku 7.17. Následně podle (5.3) vypočteme homogenizovanou matici

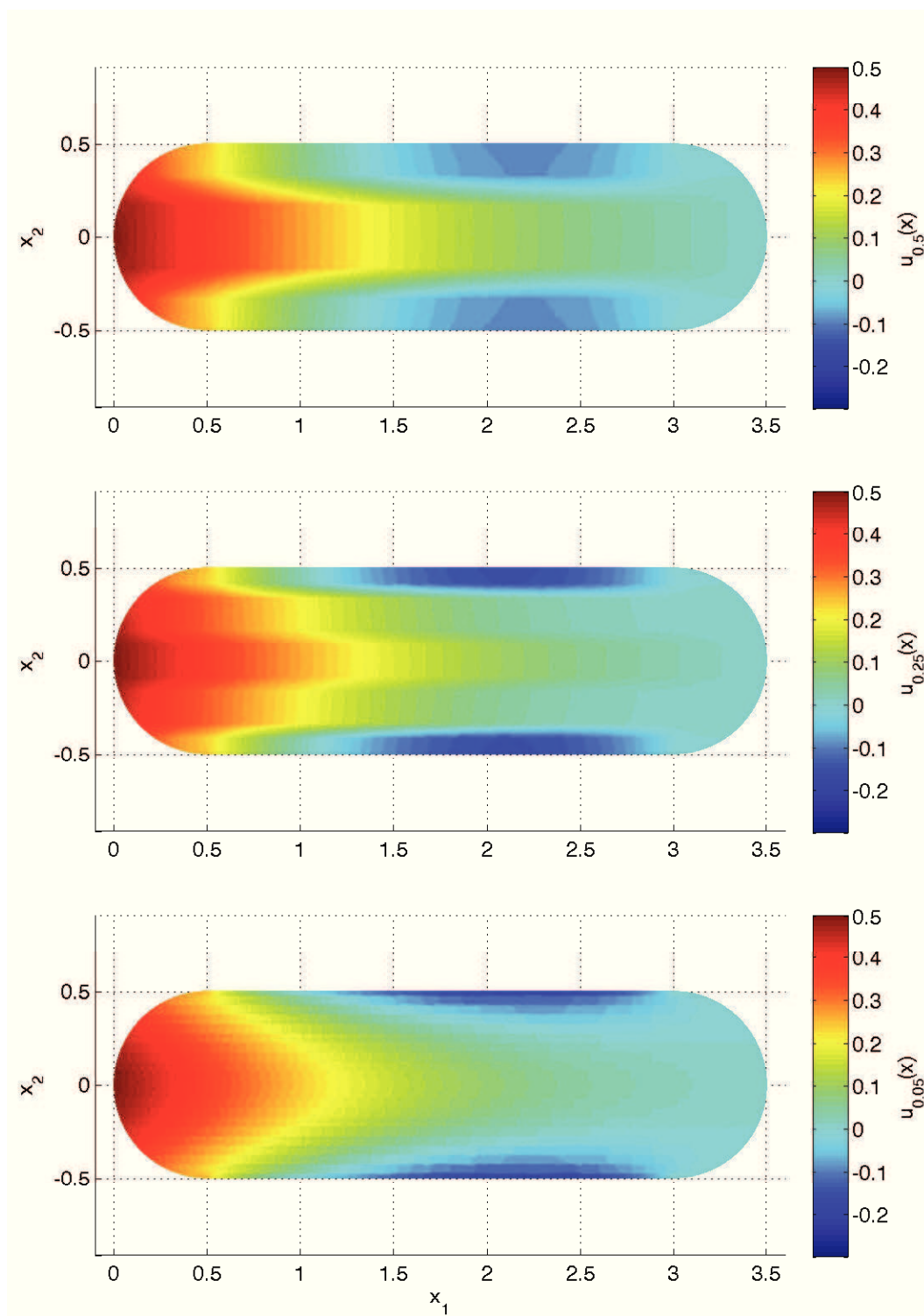
$$A^0 = \begin{pmatrix} 6,634 & 0 \\ 0 & 0,289 \end{pmatrix},$$

a pak snadno i homogenizované řešení  $u_0$  viz obrázek 7.18. Řešení  $u_\varepsilon$  jsou vykreslena na obrázku 7.19. Srovnání chyb je uvedeno v tabulce 6. Pro výpočet byla použita síť o  $2,21 \cdot 10^6$  uzlů.

Obrázek 7.17: Příklad 7.6: funkce  $\chi$ .

$\varepsilon$	$\text{err}_s$	$\text{err}_r$
1	$6,54 \cdot 10^{-1}$	$9,99 \cdot 10^{-1}$
0,5	$1,37 \cdot 10^{-1}$	$1,88 \cdot 10^{-1}$
0,25	$7,93 \cdot 10^{-2}$	$1,31 \cdot 10^{-1}$
0,1	$5,85 \cdot 10^{-2}$	$7,23 \cdot 10^{-2}$
0,05	$3,86 \cdot 10^{-2}$	$4,43 \cdot 10^{-2}$

Tabulka 6: Příklad 7.6: chyba řešení  $\text{err}_s$  a  $\text{err}_r$ .Obrázek 7.18: Příklad 7.6: řešení  $u_0$ .

Obrázek 7.19: Příklad 7.6: řešení  $u_\epsilon$ .

## Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se se základy teorie matematické homogenizace eliptických rovnic pro heterogenní objekty s jemnou periodickou strukturou. V první části byl formulován a následně dokázán homogenizační teorém pro obyčejné diferenciální rovnice. S homogenizací ve více dimenzích jsme se seznámili pomocí metody asymptotické expanze vyžadující velkou regularitu dat i řešení okrajové úlohy. Pro důkaz homogenizačního teorému pro obecněji zadané úlohy byla zavedena dvojškálová konvergence odrážející chování tzv. rapidně oscilujících funkcí, které se v těchto úlohách vyskytují.

V další části jsme stručně uvedli popis praktické implementace pomocí metody konečných prvků, která byla následně použita pro numerické experimenty. Touto klasickou metodou získáme prvky homogenizované matice pomocí hodnot derivace funkce  $\chi$ , která je řešením jisté periodické úlohy na jednotkovém čtverci. Součástí této kapitoly je i hraniční formulace homogenizační úlohy. Pro speciální případ kompozitního materiálu skládajícího se ze dvou homogenních částí jsme odvodili vztah pro výpočet koeficientů homogenizované matice využívající hodnot funkce  $\chi$  pouze na hranici, které lze určit pomocí metody hraničních prvků.

Na závěr jsme pomocí několika numerických experimentů ověřili konvergenci řešení úloh se zjemňující se periodickou strukturou k homogenizovanému řešení vypočtenému pomocí dokázaných tvrzení. Rovněž jsme ověřili, že námi odvozený vztah pro výpočet koeficientů homogenizované matice pomocí MHP dává stejné výsledky jako klasický postup pomocí MKP. Na modelové úloze vedení tepla jsme ukázali, že vztahy pro homogenizované koeficienty jsou relevantní i v případě úloh se smíšenou okrajovou podmínkou.

Tuto práci je možné považovat za úvod do problematiky homogenizace eliptických rovnic a měla by se stát východiskem pro další zkoumání v tomto oboru. Zejména se nabízí precizní odvození a formulace hraničních integrálních rovnic, pomocí kterých bude možné efektivně počítat homogenizační úlohy s kompozitními materiály. Dalším směrem vývoje by mohla být homogenizace periodicky pórovitých materiálů.





## Reference

- [1] ALLAIRE, G. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.* 1992, 23, 6, s. 1482–1518.
- [2] ALLAIRE, G. *School on Homogenization, Two-Scale Convergence and Homogenization of Periodic Structures*, s. 1–24. ICTP, Trieste, 1993.
- [3] BENSOUSSAN, A. – LIONS, J. L. – PAPANICOLAOU, G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam : North-Holland Pub. Co., 1986. 700 s., ISBN 0-444-85172-0.
- [4] BOUCHALA, J. *Zápisky z cyklu přednášek o matematické homogenizaci*. 2009.
- [5] CHECHKIN, G. A. – PIATNISKI, A. L. – SHAMAEV, A. S. *Homogenization: Methods and Applications*. USA : AMS, 2007. 241 s., ISBN 0-8218-3873-3.
- [6] CHERKAEV, A. – KOHN, R. *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*. Boston : Birkhauser, 1997. 323 s., ISBN 0-8176-3662-5.
- [7] CIORANESCU, D. – DONATO, P. *Introduction to Homogenization*. New York : Oxford University Press Inc., 1999. 262 s. ISBN: 0-19-856554-2.
- [8] COLE, J. D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. USA : Blaisdell Pub. Co, 1986. 260 s.
- [9] DEFRANCESCHI, A. *School on Homogenization, Two-Scale Convergence and Homogenization of Periodic Structures*, s. 107–168. ICTP, Trieste, 1993.
- [10] GIRAULT, V. – RAVIART, P. A. *Finite Element Methods for Navier Stokes Equations*. Berlin : Springer-Verlag, 1981. 374 s.
- [11] HASLINGER, J. *Cyklus přednášek o matematické homogenizaci*. 2009.
- [12] HOLMBOM, A. et al. On two-scale convergence and related sequential compactness topics. *Applications of Mathematics*. 1992, 51, 3, s. 247–262.
- [13] KOUZNETSOVA, V. G. *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-scale materials*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2002. 120 s. ISBN 908-386-2734-3.

- [14] LUKASSEN, D. – NGUETSENG, G. – WALL, P. Two-scale convergence. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2002, 2, 1, s. 35–80. ISSN: 1311-8080.
- [15] LUKEŠ, J. *Zápisky z funkcionální analýzy*. Praha : Karolinum, 1998. 354 s., ISBN 80-7184-597-3.
- [16] NANDAKUMARAN, A. K. – GANESH, S. S. *Lectures on Two Scale Convergence and Homogenization*. Indian Institute of Science, Bangalore : International Workshop on Multi-Scale Analysis and Homogenization, 2010. 14 s.
- [17] NGUETSENG, G. A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1989, 20, 3, s. 608–623.
- [18] PAVLIOTIS, G. A. – STUART, A. M. *Multiscale methods - Averaging and Homogenization*. New York : Springer, 2008. 307s. ISBN 978-0-387-73828-4.
- [19] STELZIG, P. E. *On problems in homogenization and two-scale convergence*. PhD thesis, Universita Degli Studi di Trento, 2012. 176 s.